ECG

1re et 2e années

Sylvain Rondy
Pierre Berlandi
Gianfranco Niffoi
Nicolas Pierson
Anne-Sophie Pierson-Fertel

PRÉPAS SCIENCES

COLLECTION DIRIGÉE PAR **BERTRAND HAUCHECORNE**

FORMULAIRE
MATHÉMATIQUES APPROFONDIES INFORMATIQUE

4e édition

Les 2 années
en 1 clin d'œil

NOUVEAUX PROGRAMMES !

ellipses

PRÉPAS SCIENCES
collection dirigée par Bertrand Hauchecorne

ECG
1re et 2e années

Formulaire MATHÉMATIQUES APPROFONDIES INFORMATIQUE

ouvrage coordonné par

Sylvain RONDY
Professeur au lycée Saint Jean (Douai)

Pierre BERLANDI
Professeur au lycée Saint Jean (Douai)

Anne-Sophie PIERSON-FERTEL
Professeur au lycée Saint Jean (Douai)

Gianfranco NIFFOI
Professeur au lycée Saint Michel de Picpus (Paris)

Nicolas PIERSON
Professeur au lycée Saint Jean (Douai)

ellipses

COLLECTION
PRÉPAS SCIENCES

Retrouvez tous les titres de la collection
et des extraits sur www.editions-ellipses.fr

ISBN 9782340-066700

/10 rue la Quintinie 75015 Paris

www.editions-ellipses.fr

AVANT-PROPOS

La réussite en prépa nécessite une acquisition solide des connaissances et une capacité à les mettre en réseau ; elle exige par ailleurs d'en avoir une vision claire et de savoir les mobiliser rapidement. Les deux ouvrages « mathématiques approfondies-informatique » (première et deuxième année) de la collection *Prépas sciences* répondent au premier besoin. Ce formulaire vous permettra de satisfaire à cette deuxième exigence.

C'est en effet un résumé clair et concis du cours : définitions, théorèmes et propriétés. Les formules sont mises en valeur par un encadrement sur une trame grisée.

Aucune démonstration n'est faite, aucun exemple n'est proposé, car l'unique objectif est de retrouver le plus vite possible la définition ou la propriété cherchée.

Ce formulaire est structuré en 56 chapitres thématiques, répartis en 6 parties : généralités, analyse, algèbre linéaire, algèbre bilinéaire, probabilités et informatique.

Un index très précis en fin d'ouvrage permet de trouver rapidement et sans hésitation la notion cherchée. Ainsi, ce formulaire est le compagnon idéal pour la préparation des colles, la résolution des exercices et des problèmes mais surtout pour accompagner les révisions avant les concours.

Bertrand Hauchecorne

Sommaire

Algèbre bilinéaire

Probabilités

Informatique (Python)

Généralités

1. SOMMES ET PRODUITS

Somme des termes d'une suite constante

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \sum_{k=p}^{n} a = (n-p+1)a$$

Sommes des puissances des *n* premiers entiers

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Sommes géométriques

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } q=1 \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \end{cases}$$

Plus généralement : $\forall q \neq 1,\ \forall n \geq p,\ \sum_{k=p}^{n} q^k = q^p \dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$.

Distributivité, commutativité et associativité

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \sum_{k=1}^{n} \lambda x_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k \quad (\lambda \text{ ne dépend pas de l'indice})$$

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=1}^{n} y_k$$

Changement d'indice

Soit deux entiers naturels n et p tels que $p \leq n$.

Seuls les deux changements d'indice suivants sont autorisés :

- Changement d'indice : $i = k + m$ (avec m entier)

$$\sum_{k=p}^{n} x_{k+m} = \sum_{i=p+m}^{n+m} x_i$$

- Changement d'indice : $i = m - k$ (avec m entier supérieur ou égal à n)

$$\sum_{k=p}^{n} x_{m-k} = \sum_{i=m-n}^{m-p} x_i$$

Télescopage

Quels que soient les réels $x_0, \ldots, x_{n+1}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \left(x_{k+1} - x_k\right) = x_{n+1} - x_0$$

Interversion de sommes doubles

Si les indices sont indépendants :

$$\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,m]\!]} x_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} x_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{i,j}\right)$$

Si les indices sont dépendants :

$$\sum_{1\leq i\leq j\leq n} x_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} x_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} x_{i,j}$$

$$\sum_{1\leq i< j\leq n} x_{i,j} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} x_{i,j} = \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} x_{i,j}$$

Lien entre sommes simple et double

Quels que soient les réels $x_1,...,x_n$, avec n élément de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j$$

Factorielle

Pour tout entier naturel n, on appelle *factorielle* de n, et on note $n!$, l'entier naturel défini par $0!=1$ et, pour tout entier naturel n non nul : $n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1\times 2\times ...\times n$.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $n! = n\times(n-1)!$.

Produit de termes d'une suite constante

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \prod_{k=1}^{n} \lambda = \lambda^n$$

Opérations compatibles avec $\prod$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \prod_{k=1}^{n}(x_k y_k) = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\prod_{k=1}^{n} y_k\right)$$

Si aucun des y_k n'est nul, alors : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{x_k}{y_k} = \frac{\prod_{k=1}^{n} x_k}{\prod_{k=1}^{n} y_k}$

Télescopage

Si aucun des x_k n'est nul, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \prod_{k=0}^{n}\frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{x_{n+1}}{x_0}$$

2. ENSEMBLES ET APPLICATIONS

Comparaison d'ensembles

On dit que l'ensemble A est *inclus* dans l'ensemble B, et on note $A \subset B$, lorsque tout élément de A est élément de B.

On dit que deux ensembles A et B sont *égaux*, et on note $A = B$, lorsque l'on a : $A \subset B$ et $B \subset A$.

On dit que l'ensemble A est une *partie* de l'ensemble E (ou encore un *sous-ensemble* de E) lorsque A est inclus dans E.
L'ensemble de toutes les parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$.

Intersection et réunion

L'*intersection* des ensembles A et B est l'ensemble, noté $A \cap B$, constitué des éléments qui sont à la fois dans A et dans B.

$$\boxed{x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in B}$$

La *réunion* des ensembles A et B est l'ensemble, noté $A \cup B$, constitué des éléments qui sont dans l'un au moins des ensembles A ou B.

$$\boxed{x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B}$$

Commutativité

L'intersection et la réunion sont commutatives :

$$\boxed{A \cap B = B \cap A \text{ et } A \cup B = B \cup A}$$

Associativité

L'intersection et la réunion sont associatives :

$$\boxed{\begin{array}{c}(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C \\ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C\end{array}}$$

Les ensembles considérés dans la suite sont tous des parties d'un ensemble Ω .

Élément neutre

Ω est élément neutre pour l'intersection : $A \cap \Omega = A$.
$\varnothing$ est élément neutre pour la réunion : $A \cup \varnothing = A$.

Inclusion, intersection et réunion

$$\boxed{A \cap B \subset A \text{ et } A \subset A \cup B}$$

$A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$.
$A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$.

$$\boxed{A \cap A = A \text{ et } A \cup A = A}$$

Distributivité

L'intersection et la réunion sont distributives l'une sur l'autre :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Complémentaire

Le *complémentaire* de A est l'ensemble, noté $\overline{A}$, contenant les éléments de Ω qui ne sont pas dans A. On a : $x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A$.

On a : $\overline{\overline{A}} = A$; $\overline{\varnothing} = \Omega$; $\overline{\Omega} = \varnothing$.
$\overline{A}$ est la seule partie de Ω vérifiant : $A \cap \overline{A} = \varnothing$ et $A \cup \overline{A} = \Omega$.

$$\boxed{A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}}$$

Lois de Morgan

$$\boxed{\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \text{ et } \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}}$$

Plus généralement, si I désigne un ensemble d'indices, on a :

$$\boxed{\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i} \text{ et } \overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}}$$

Produit cartésien

On définit le *produit cartésien* des ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n$ par :
$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{\ (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i \in A_i\ \}$.
Le produit $A \times A$ est noté A^2.

Ensembles dénombrables, ensembles finis

On dit qu'un ensemble E est *dénombrable* s'il existe une bijection de E sur $\mathbb{N}$.

Un ensemble E est dit *fini* s'il est vide ou s'il existe un entier naturel n non nul tel qu'il existe une bijection de E vers $[\![1, n]\!]$.
Le nombre n est appelé cardinal de E, noté Card (E).
On a Card $(\varnothing) = 0$.

Dans toute la suite, E, F et G désignent des ensembles.

Fonctions et applications

Une fonction f de E dans (ou vers) F est un procédé qui permet d'associer certains éléments de E avec des éléments de F appelés leurs images, de telle façon que tout élément x de E possède au maximum une image y dans F.

Une application f de E dans F est une fonction de E dans F telle que tout élément de E possède exactement une image par f dans F.
L'ensemble des applications de E dans F est noté $\mathcal{A}(E, F)$.

Identité

On appelle *identité* de E (ou *application identique* de E), l'application de E dans E, notée Id_E et définie par :

$$\boxed{\forall x \in E,\ Id_E(x) = x}$$

Restriction d'une application

Soit f une application de E dans F et E' une partie de E. On appelle *restriction* de f à E', l'application notée $f_{|E'}$ définie par :

$$\boxed{\forall x \in E', f_{|E'}(x) = f(x)}$$

Composée d'applications

Soit f une application de E dans F et g une application de F dans G. On note $g \circ f$ (et on lit "g rond f") l'application de E dans G qui à tout élément x de E associe :

$$\boxed{(g \circ f)(x) = g(f(x))}$$

Lorsque les composées écrites ci-après existent, on a :

$$\boxed{(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) = f \circ g \circ h}$$

Si f est une application de E dans F, on a :

$$\boxed{f \circ Id_E = Id_F \circ f = f}$$

Injection

Une application f de E dans F est *injective* (ou est une *injection*) si chaque élément de F admet au plus un antécédent dans E par f.

Une application f de E dans F est injective si, et seulement si :

$$\boxed{\forall (x_1, x_2) \in E^2, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2}$$

Surjection

Une application f de E dans F est *surjective* (ou est une *surjection*) si chaque élément de F admet au moins un antécédent dans E par f.

Une application f de E dans F est surjective si et seulement si :

$$\boxed{\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)}$$

Bijection

Une application f de E dans F est une application *bijective* (on dit aussi une *bijection*) si elle est injective et surjective.

Une application f de E dans F est bijective si et seulement si :

$$\boxed{\forall y \in F\ ,\ \exists ! x \in E\ ,\ y = f(x)}$$

Autrement dit :

Une application f de E dans F est une bijection de E dans F si, et seulement si, il existe une unique fonction g de F dans E telle que, pour tout x de E et tout y de F, on a :

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$$

Bijection réciproque

L'unique fonction g définie ci-dessus est appelée *bijection réciproque* de f et est notée f^{-1}. On a donc l'équivalence :

$$\boxed{y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)}$$

Composée de bijections

Si f est une bijection de E dans F et g une bijection de F dans G, alors $g \circ f$ est une bijection de E dans G et l'on a :

$$\boxed{(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}}$$

Théorème de la bijection

Si f est une application, définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, continue et strictement monotone sur I, alors f est une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$.

Lorsque f est continue et strictement monotone sur I, f et f^{-1} ont les mêmes variations.

En mathématiques, "évident" est le mot le plus dangereux.

Eric Temple Bell

3. COEFFICIENTS BINOMIAUX

Permutations et factorielles

Soit E un ensemble fini contenant n éléments. Une *permutation* de E est une bijection de E dans E.

Il y a $n\,!$ permutations d'un ensemble E à n éléments.

Valeurs à connaître (ou à retrouver)

Par convention, on pose $0!=1$.
$1!=1$, $2!=2$, $3!=6$, $4!=24$, $5!=120$.

Nombre de parties à *p* éléments

Le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments est égal à $\binom{n}{p}$, ce qui se prononce "p parmi n" et on a :

$$\binom{n}{p} = \begin{cases} \dfrac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si } 0 \leq p \leq n \\ 0 \quad \text{si } p > n \end{cases}$$

Remarque : les nombres $\binom{n}{p}$ sont des entiers naturels appelés *coefficients binomiaux*.

Calcul pratique

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p!}$$

Par exemple : $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$, $\binom{n}{3} = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$.

Nombre de façons de choisir *p* objets

Le nombre $\binom{n}{p}$ est égal au nombre de façons de choisir (sans considération d'ordre ou de hiérarchie) p objets distincts parmi n objets donnés (avec $p \leq n$).

Nombre de chemins

Dans un arbre binaire (succès-échec), le nombre $\binom{n}{p}$ est égal au nombre de chemins sur lesquels on obtient p succès lors de n répétitions indépendantes d'une épreuve aléatoire (loi binomiale).

Symétrie des coefficients binomiaux

Les nombres $\binom{n}{p}$ sont appelés *coefficients binomiaux* et on a :

$$\boxed{\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}}$$

Relations "diagonales"

$$\boxed{\forall n \geq 1, \forall p \geq 1, p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}}$$

$$\boxed{\forall n \geq 2, \forall p \geq 2, p(p-1)\binom{n}{p} = n(n-1)\binom{n-2}{p-2}}$$

Seule la première de ces deux relations est exigible et il est prudent de savoir démontrer la deuxième.

Triangle de Pascal

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in [\![1, n]\!], \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}}$$

Remarque. Si $p > n$, cette égalité est encore vraie puisqu'elle donne $0 = 0 + 0$.

Formule du binôme de Newton

Pour tout couple (a, b) de réels et pour tout entier naturel n, on a :

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k}$$

Nombre de parties d'un ensemble

En faisant $a = b = 1$ dans la formule du binôme ci-dessus, on trouve $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$, ce qui traduit le fait que :

Le nombre de parties d'un ensemble à n éléments est égal à 2^n.

&

Tout l'Univers repose sur l'ensemble des entiers naturels.

Pythagore de Samos

4. TRIGONOMÉTRIE

Formules d'addition (à connaître)

Pour tous réels a et b, on a :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

Il faut savoir en déduire :

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

Formules de duplication (à savoir retrouver)

Pour tout réel a, il faut savoir prouver (en faisant $a = b$ dans les formules d'addition et en utilisant $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$) que l'on a :

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$

$$\sin(2a) = 2\sin a \cos a$$

Formules de linéarisation (à savoir retrouver)

Pour tout réel a, on déduit grâce aux formules donnant $\cos(2a)$ que l'on a :

$$\cos^2 a = \frac{1+\cos(2a)}{2} \quad \text{et} \quad \sin^2 a = \frac{1-\cos(2a)}{2}$$

Valeurs trigonométriques remarquables

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π
$\sin x$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	–1
$\tan x$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	////////	0

5. POLYNÔMES

Définitions

On appelle *polynôme* à coefficients réels toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par une expression de la forme :

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

Les réels a_0, a_1, ..., a_n sont appelés coefficients de *P*.
Si tous les coefficients de *P* sont nuls, *P* est appelé le polynôme nul et on note $P = 0$.

Soit *P* défini par $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ un polynôme non nul, où n est un entier naturel et $a_n \neq 0$. L'entier n est appelé *degré* de *P* (on note $\deg P = n$) et a_n est appelé *coefficient dominant* de *P*.
Si $a_n = 1$, le polynôme *P* est dit *normalisé* ou *unitaire*.
Par convention, le polynôme nul est de degré $-\infty$.

L'ensemble des polynômes est noté $\mathbb{R}[x]$ et l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n est noté $\mathbb{R}_n[x]$.

Égalité de deux polynômes

Deux polynômes non nuls sont égaux s'ils ont même degré et mêmes coefficients.

Degré d'une somme, degré d'un produit

Soit *P* et *Q* deux polynômes. On a :

$$\boxed{\deg(P+Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)}$$

$$\boxed{\deg(PQ) = \deg P + \deg Q}$$

Division euclidienne

Soit A et B deux polynômes de $\mathbb{R}[x]$ avec $B \neq 0$.
Il existe un unique couple (Q, R) de polynômes de $\mathbb{R}[x]$ tel que $A = BQ + R$, avec $\deg R < \deg B$.

Les polynômes Q et R sont appelés respectivement *quotient* et *reste* dans la division euclidienne de A par B.

On dit qu'un polynôme non nul B *divise* un polynôme A ou que A est *divisible* par B s'il existe un polynôme Q tel que $A = BQ$. On dit aussi que A est *multiple* de B.

Polynôme dérivé

Soit le polynôme $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$.
Si P est constant, alors P' est le polynôme nul.
Si $\deg P \geq 1$, alors $\boxed{P' = \sum_{i=1}^{n} i\, a_i X^{i-1}}$

Polynômes dérivés successifs

On définit les polynômes dérivés successifs de P, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, par $P^{(k)} = \left(P^{(k-1)}\right)'$, avec la convention : $P^{(0)} = P$.

Il faut savoir retrouver le résultat suivant :

Soit un polynôme $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i$ de degré n $(a_n \neq 0)$.

- $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\deg P^{(k)} = n - k$ et $P^{(k)}(x) = \sum_{i=k}^{n} \frac{i!}{(i-k)!} a_i\, x^{i-k}$.
- $\forall k \in [\![n+1, +\infty[\![$, $P^{(k)} = 0$.

Formule de Taylor

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_n[x]$.

$$\forall a \in \mathbb{R}, \; P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Racines d'un polynôme

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[x]$ et r un réel. On dit que r est une *racine* du polynôme P si $P(r)=0$.

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[x]$ et r un réel.

r est racine de P si et seulement si $x-r$ divise $P(x)$.

Soit n un entier naturel non nul et P un polynôme ayant n racines distinctes $r_1, r_2, ..., r_n$. Le polynôme $\prod_{i=1}^{n}(x-r_i)$ divise $P(x)$.

Tout polynôme non nul de $\mathbb{R}_n[x]$ admet au plus n racines.

Racines et polynôme nul

Un polynôme de degré inférieur ou égal à n qui possède au moins $n+1$ racines est le polynôme nul.
Tout polynôme qui admet une infinité de racines est nul.

Racines simples, racines multiples

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[x]$, r un réel et m un entier naturel non nul. On dit que r est *racine d'ordre de multiplicité m* du polynôme P si :

$(X-r)^m$ divise $P(x)$ et si $(X-r)^{m+1}$ ne divise pas $P(x)$.

Autrement dit, r est racine d'ordre de multiplicité m de P s'il existe un polynôme Q tel que $P(x)=(x-r)^m Q(x)$ avec $Q(r)\neq 0$.

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[x]$ et m un entier naturel non nul. Le scalaire r est une racine d'ordre de multiplicité m du polynôme P si et seulement si :

$$\boxed{\forall k \in [\![0, m-1]\!],\ P^{(k)}(r) = 0 \text{ et } P^{(m)}(r) \neq 0.}$$

Une *racine simple* est une racine d'ordre de multiplicité égal à 1.

Factorisation

Tout polynôme de $\mathbb{R}[x]$ peut s'écrire comme produit de polynômes à coefficients réels de degré 1 et de polynômes à coefficients réels de degré 2 n'ayant pas de racine réelle.

Trinôme

Soit le trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b, c fixés avec $a \neq 0$).

Le discriminant de ce trinôme est $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta < 0$, $P(x)$ n'admet aucune racine et n'est pas factorisable.
- Si $\Delta = 0$, $P(x)$ admet l'unique racine $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = a(x - x_0)^2$$

- Si $\Delta > 0$, $P(x)$ admet deux racines distinctes, $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$, et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Signe du trinôme

- Si $\Delta \leq 0$, le trinôme $ax^2 + bx + c$ est du signe de a.
- Si $\Delta > 0$, le trinôme $ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe de $-a$ entre les racines.

Liens entre racines et coefficients du trinôme

Soit le trinôme ax^2+bx+c. On suppose que $\Delta \geq 0$ et on désigne par x_1 et x_2 les racines (égales ou pas) de ce trinôme. On a alors :

$$\begin{cases} x_1+x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

&

L'essence des mathématiques, c'est la liberté.

Georg Cantor

Analyse

6. FONCTIONS USUELLES

Valeur absolue

On appelle fonction "valeur absolue" la fonction qui, à tout réel x, associe le nombre $|x|$ défini par : $|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$.

La fonction "valeur absolue" est paire : $\forall x \in \mathbb{R},\ |-x| = |x|$.

Valeur absolue et multiplication

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |xy| = |x||y|$ et $\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*,\ \left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$.

Valeur absolue et inégalités

Inégalité triangulaire : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x+y| \leq |x| + |y|$

Soit x un réel quelconque et M un réel positif. Alors, on a :

$$|x| \leq M \Leftrightarrow -M \leq x \leq M$$

Fonction carré et inégalités

Soit x un réel quelconque et a un réel positif. On a :

- $x^2 \leq a^2 \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$.
- $x^2 \geq a^2 \Leftrightarrow (x \leq -a \text{ ou } x \geq a)$.

Propriétés algébriques de ln

Soit a et b deux réels strictement positifs et n un entier relatif.

- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.
- $\ln(a^n) = n \ln a$.
- $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln a$.
- $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$.

ln et (in)égalités

Soit a et b deux réels strictement positifs. On a :
- $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$.
- $\ln a \leq \ln b \Leftrightarrow a \leq b$.
- $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$.

Liens entre ln et exp

- $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}_+^*,\ \left(\exp(x) = y \Leftrightarrow x = \ln y\right)$.
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \ln\left(\mathrm{e}^x\right) = x$.
- $\forall y \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{e}^{\ln y} = y$.

Propriétés algébriques de exp

Soit a et b deux réels quelconques et n un entier relatif. On a :
- $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \mathrm{e}^b$ et $\left(\mathrm{e}^a\right)^b = \mathrm{e}^{ab}$.
- $\mathrm{e}^{-a} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^a}$ et $\mathrm{e}^{a-b} = \dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}$.

exp et (in)égalités

Soit a et b deux réels quelconques. On a :
- $\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b \Leftrightarrow a = b$.
- $\mathrm{e}^a \leq \mathrm{e}^b \Leftrightarrow a \leq b$.
- $\mathrm{e}^a < \mathrm{e}^b \Leftrightarrow a < b$.

Propriétés algébriques des fonctions puissances

Soit α et β des réels, x et y des réels strictement positifs. On a :
- $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$, $x^{-\alpha} = \dfrac{1}{x^\alpha}$ et $x^{\alpha-\beta} = \dfrac{x^\alpha}{x^\beta}$.
- $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$ et $\left(\dfrac{x}{y}\right)^\alpha = \dfrac{x^\alpha}{y^\alpha}$.
- $\left(x^\alpha\right)^\beta = x^{\alpha\beta}$.

Liens entre puissance et racine carrée

Pour tout réel x **strictement positif**, $x^{1/2} = \sqrt{x}$.

Pour tout réel x positif, on a : $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$.

Pour tout réel x, on a : $\sqrt{x^2} = |x|$.

Partie entière et inégalités

On appelle fonction "partie entière" la fonction qui, à tout réel x, associe le seul entier, noté $\lfloor x \rfloor$, qui vérifie : $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Polynômes : factorisation et racine

Si P est un polynôme de degré n possédant une racine a, alors $P(x)$ se factorise par $(x-a)$. Autrement dit, il existe un polynôme Q de degré $(n-1)$ tel que $P(x) = (x-a)Q(x)$.

Valeurs à connaître

$\ln 1 = 0$ et $\ln 2 \simeq 0{,}69$.

$\mathrm{e}^0 = 1$ et $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e} \simeq 2{,}718$.

$\sqrt{0} = 0$, $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{2} \simeq 1{,}414$ et $\sqrt{3} \simeq 1{,}732$.

Fonctions sinus et cosinus

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin x \in [-1,1]$ et $\cos x \in [-1,1]$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

La fonction sinus est impaire et la fonction cosinus est paire.

Les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques .

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin'(x) = \cos x$ et $\cos'(x) = -\sin x$.

La fonction sinus réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1,1]$.

La fonction cosinus réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1,1]$.

Fonction tangente

La fonction tangente est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$

$\forall x \in D$, $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$. On en déduit : $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

La fonction tangente est impaire et π-périodique .

$\forall x \in D$, $\tan'(x) = 1 + \tan^2 x$

La fonction tangente réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.

Fonction arc tangente

La fonction Arctan est la bijection réciproque de la restriction de la fonction tangente à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\tan(\operatorname{Arctan} x) = x$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Arctan}'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{Arctan} x = \dfrac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{Arctan} x = -\dfrac{\pi}{2}$.

&

Les mathématiques sont la clef pour comprendre
et maîtriser nos mondes physiques sociaux et biologiques.

Morris Kline

7. GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

On considère une fonction f d'une variable réelle, à valeurs réelles. On note D_f son ensemble de définition et (C_f) sa représentation graphique dans un repère orthogonal $(x\mathrm{O}y)$.

Parité, imparité

La fonction f est *paire* si D_f est centré en 0 et :

$$\boxed{\forall x \in D_f,\ f(-x) = f(x)}$$

La fonction f est *impaire* si D_f est centré en 0 et :

$$\boxed{\forall x \in D_f,\ f(-x) = -f(x)}$$

Parité et symétrie

Si f est paire, alors (C_f) est symétrique par rapport à $(\mathrm{O}y)$.
Si f est impaire, alors (C_f) est symétrique par rapport à O.

Périodicité

La fonction f est dite *périodique* lorsqu'il existe un réel strictement positif T tel que :

$$\boxed{\forall x \in D_f,\ x+T \in D_f \text{ et } f(x+T) = f(x)}$$

On dit que f est T-périodique, et T est une *période* de f.

Majorant, minorant

Soit une partie A de $\mathbb{R}$, incluse dans D_f.

- La fonction f est dite *majorée* sur A s'il existe un réel M tel que : $\forall x \in A,\ f(x) \leq M$. Le réel M est appelé un *majorant* de f sur A.
- La fonction f est dite *minorée* sur A s'il existe un réel m tel que : $\forall x \in A,\ f(x) \geq m$. Le réel m est appelé un *minorant* de f sur A.
- La fonction f est *bornée* si elle est à la fois majorée et minorée.

Extremums globaux

Soit une partie A de $\mathbb{R}$, incluse dans D_f et x_0 un point de A.

• On dit que f admet un *maximum global* sur A en x_0, lorsque :

$$\boxed{\forall x \in A,\ f(x) \leq f(x_0)}$$

On note alors $f(x_0) = \max\limits_{x \in A} f(x)$.

• On dit que f admet un *minimum global* sur A en x_0, lorsque :

$$\boxed{\forall x \in A,\ f(x) \geq f(x_0)}$$

On note alors $f(x_0) = \min\limits_{x \in A} f(x)$.

Extremums locaux

Soit une partie A de $\mathbb{R}$, incluse dans D_f et x_0 un point de A.

• On dit que f admet un *maximum local* sur A en x_0, lorsqu'il existe un voisinage V de x_0 tel que :

$$\boxed{\forall x \in A \cap V,\ f(x) \leq f(x_0)}$$

• On dit que f admet un *minimum local* sur A en x_0, lorsqu'il existe un voisinage V de x_0 tel que :

$$\boxed{\forall x \in A \cap V,\ f(x) \geq f(x_0)}$$

Borne supérieure, borne inférieure

• Si la fonction f est majorée sur A, alors l'ensemble de ses majorants admet un plus petit élément, appelé *borne supérieure de f* sur A, et noté $\sup\limits_{x \in A} f(x)$.

• Si la fonction f est minorée sur A, alors l'ensemble de ses minorants admet un plus grand élément, appelé *borne inférieure de f* sur A, et noté $\inf\limits_{x \in A} f(x)$.

Sens de variation

Soit une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

• La fonction f est *croissante* sur I lorsque :

$$\boxed{\forall (x, y) \in I^2,\ x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)}$$

La fonction f est *strictement croissante* sur I lorsque :

$$\boxed{\forall (x, y) \in I^2,\ x < y \Rightarrow f(x) < f(y)}$$

• La fonction f est *décroissante* sur I lorsque :

$$\boxed{\forall (x, y) \in I^2,\ x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)}$$

La fonction f est *strictement décroissante* sur I lorsque :

$$\boxed{\forall (x, y) \in I^2,\ x < y \Rightarrow f(x) > f(y)}$$

• La fonction f est *monotone* sur I lorsque f est soit croissante, soit décroissante sur I. On définit de même la stricte monotonie.

Sens de variation et composition

	f croît sur I	f décroît sur I
g croît sur $f(I)$	$g \circ f$ croît sur I	$g \circ f$ décroît sur I
g décroît sur $f(I)$	$g \circ f$ décroît sur I	$g \circ f$ croît sur I

Sens de variation d'une bijection réciproque

Soit f une bijection d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J de $\mathbb{R}$. Si f est strictement monotone sur I, alors f^{-1} est une bijection de J sur I, ayant le même sens de variation que f.

&

Le climat des mathématiques est commandé par les rigueurs d'une logique implacable

Arnaud Denjoy

8. LIMITES

Limite finie en un point

Soit un réel ℓ et une fonction f définie au voisinage du réel x_0.

On dit que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ lorsque :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in D_f,\ |x - x_0| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon}$$

Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$:

- Soit f est définie en x_0, alors $\ell = f(x_0)$ et f est continue en x_0.
- Soit f n'est pas définie en x_0 et f se prolonge par continuité en x_0.

Unicité de la limite

Si f admet une limite en x_0, alors celle-ci est unique.

Limite à gauche, limite à droite

- Soit une fonction f définie sur un voisinage à gauche de x_0.

On dit que $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$ lorsque :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in D_f,\ x_0 - \alpha \leq x < x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon}$$

- Soit une fonction f définie sur un voisinage à droite de x_0.

On dit que $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$ lorsque :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in D_f,\ x_0 < x \leq x_0 + \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon}$$

Lien entre limite et limites à droite et à gauche

Soit f une fonction définie au voisinage de x_0.

Si f n'est pas définie en x_0, alors f admet ℓ pour limite en x_0 si, et seulement si, f admet ℓ pour limite à gauche en x_0 et pour limite à droite en x_0.

Si f est définie en x_0, alors f admet une limite en x_0 si, et seulement si, f admet une limite à gauche en x_0 et une limite à droite en x_0 toutes les deux égales à $f(x_0)$. Dans ce cas, f est continue en x_0.

Limite infinie en un point

- La limite de f en x_0 est égale à $+\infty$ lorsque :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in D_f,\ \left| x - x_0 \right| \leq \alpha \Rightarrow f(x) \geq A$$

- La limite de f en x_0 est égale à $-\infty$ lorsque :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in D_f,\ \left| x - x_0 \right| \leq \alpha \Rightarrow f(x) \leq A$$

La droite d'équation $x = x_0$ est *asymptote verticale* à C_f.

Limite finie (ℓ) en l'infini

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists B > 0,\ \forall x \geq B,\ \left| f(x) - \ell \right| \leq \varepsilon$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists B < 0,\ \forall x \leq B,\ \left| f(x) - \ell \right| \leq \varepsilon$

La droite d'équation $y = \ell$ est *asymptote horizontale* à C_f.

Limite infinie en l'infini

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R},\ \exists B > 0,\ \forall x \geq B,\ f(x) \geq A$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R},\ \exists B > 0,\ \forall x \geq B,\ f(x) \leq A$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R},\ \exists B < 0,\ \forall x \leq B,\ f(x) \geq A$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R},\ \exists B < 0,\ \forall x \leq B,\ f(x) \leq A$

Dans le cas où la limite de f en l'infini est infinie, il se peut que l'on soit face à la situation suivante (pas explicitement au programme) :

Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - (ax + b) \right) = 0$, alors on dit que ($C_f$) a en $\pm\infty$ une *asymptote oblique* d'équation $y = ax + b$.

Limites et somme (a réel ou infini)

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	ℓ	ℓ
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} \left(f(x)+g(x)\right)$	$-\infty$	$+\infty$	Forme indéterminée	$+\infty$	$-\infty$

Limites et produit (a réel ou infini)

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\pm\infty$	$\ell \neq 0$	0
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} \left(f(x)g(x)\right)$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	Forme Indéterminée
	la règle des signes donne le signe de la limite du produit		

Limite de l'inverse d'une fonction (a réel ou infini)

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\pm\infty$	$\ell \neq 0$	0 et $f(x)<0$ au voisinage de a	0 et $f(x)>0$ au voisinage de a
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)}$	0	$\dfrac{1}{\ell}$	$-\infty$	$+\infty$

Composition des limites

Soit a, b et c réels ou infinis. Soit une fonction f définie au voisinage de a et une fonction g définie au voisinage de b.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ et $\lim\limits_{x\to b} g(x)=c$, alors $\lim\limits_{x\to a} g(f(x))=c$.

Limites usuelles

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1 \;;\; \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 \;;\; \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \;;\; \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2} \;;\; \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$$

Croissances comparées

Pour tout couple $(\alpha,\ \beta)$ de réels strictement positifs, on a :

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha}\left|\ln x\right|^{\beta}=0,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^{\beta}}{x^{\alpha}}=0,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\beta x}}{x^{\alpha}}=+\infty,\ \lim_{x\to-\infty}\left|x\right|^{\alpha}e^{\beta x}=0$$

On a, en particulier :

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x=0. \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0. \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x}=+\infty.$$

Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\lim_{x\to-\infty} x^{n}e^{x}=0$$

Prolongement des inégalités (*a* réel ou infini)

Si pour tout x d'un voisinage de a, on a $f(x)<g(x)$ ou $f(x)\leq g(x)$, et si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\ell'$, alors : $\ell\leq\ell'$.

Théorème de comparaison (*a* réel ou infini)

Si pour tout x d'un voisinage de a, on a $f(x)\leq g(x)$, alors :

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$.
- $\lim\limits_{x\to a} g(x)=-\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$.

Théorème d'encadrement (*a* réel ou infini)

Si pour tout x d'un voisinage de a, on a $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$ et si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} h(x)=\ell$, alors : $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\ell$.

Si pour tout x d'un voisinage de a, on a $\left|f(x)-\ell\right|\leq g(x)$ et si $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$.

Théorème de la limite monotone

Si f est monotone de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$, alors f admet des limites finies à droite et à gauche en tout point de $]a, b[$. De plus, on a :

	f croissante	**f décroissante**
f majorée	f a une limite finie en b^-	f a une limite finie en a^+
f non majorée	$\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$
f minorée	f a une limite finie en a^+	f a une limite finie en b^-
f non minorée	$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = -\infty$

&

L'empire de la mathématique sur la matière
est un empire de douceur

Simone Weil

9. NÉGLIGEABILITÉ ET ÉQUIVALENCE (FONCTIONS)

Négligeabilité

Soit a réel ou infini. Une fonction f est *négligeable* devant g au voisinage de a s'il existe une fonction ε de limite nulle en a, telle que $f(x)=\varepsilon(x)g(x)$ au voisinage de a. On note : $f(x) \underset{a}{=} o(g(x))$.

Au voisinage de a, $o(1)$ désigne une fonction de limite nulle en a.

Caractérisation de la négligeabilité

Si la fonction g ne s'annule pas au voisinage de a, alors :

$$f(x) \underset{a}{=} o(g(x)) \Leftrightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0$$

Négligeabilité et opérations

- Si $f(x) \underset{a}{=} o(h(x))$ et $g(x) \underset{a}{=} o(h(x))$, alors on a :

$$\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\ \alpha f(x)+\beta g(x) \underset{a}{=} o(h(x))$$

- Si $f(x) \underset{a}{=} o(g(x))$ et $g(x) \underset{a}{=} o(h(x))$, alors $f(x) \underset{a}{=} o(h(x))$.

Négligeabilités usuelles

$$\forall\alpha>0,\ \forall\beta>0,\ (\ln x)^\beta \underset{+\infty}{=} o(x^\alpha) \text{ et } x^\alpha \underset{+\infty}{=} o(\mathrm{e}^{\beta x})$$

Équivalence

Soit a réel ou infini. Les fonctions f et g sont *équivalentes* au voisinage de a lorsqu'il existe une fonction α telle que $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=1$, et vérifiant $f(x)=\alpha(x)g(x)$ au voisinage de a.

On note : $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$.

Lien entre équivalence et négligeabilité

$$\boxed{f(x) \underset{a}{\sim} g(x) \Leftrightarrow f(x) \underset{a}{=} g(x) + o(g(x))}$$

En d'autres termes :

$$\boxed{g(x) + o(g(x)) \underset{a}{\sim} g(x)}$$

Caractérisation de l'équivalence

Si la fonction g ne s'annule pas au voisinage de a, alors :

$$f(x) \underset{a}{\sim} g(x) \Leftrightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Transitivité

Si $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$ et $g(x) \underset{a}{\sim} h(x)$, alors $f(x) \underset{a}{\sim} h(x)$.

Équivalence et opérations

• Si $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$ et si $h(x) \underset{a}{\sim} k(x)$, alors :

$$f(x)h(x) \underset{a}{\sim} g(x)k(x)$$

• Si $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f^n(x) \underset{a}{\sim} g^n(x)$$

• Si $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$, et si de plus f et g ne s'annulent pas au voisinage de a, alors :

$$\frac{1}{f(x)} \underset{a}{\sim} \frac{1}{g(x)}$$

• Si $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$, et si de plus f et g sont strictement positives au voisinage de a, alors :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ f^\alpha(x) \underset{a}{\sim} g^\alpha(x)$$

L'équivalence n'est en général pas compatible avec l'addition et la composition des fonctions.

Polynômes et équivalents

• Un polynôme non nul est équivalent, au voisinage de 0, à son monôme de plus bas degré.

• Un polynôme non nul est équivalent, aux voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$, à son monôme de plus haut degré.

Équivalents usuels

On désigne par α un nombre réel non nul (indépendant de x).

$e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$	$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$	$(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$
$\sin x \underset{0}{\sim} x$	$1-\cos x \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$	$\tan x \underset{0}{\sim} x$

Équivalents et limites

• Si $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$ et si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell$ (vrai même si $\ell = +\infty$ ou $\ell = -\infty$).

• Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ et si $\ell \neq 0$, alors : $f(x) \underset{a}{\sim} \ell$.

Partie entière

La fonction *partie entière* est la fonction qui à tout réel x associe le seul entier, noté $\lfloor x \rfloor$ défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

Il faut savoir en déduire :

$$\boxed{\lfloor x \rfloor \underset{\pm\infty}{\sim} x}$$

&

En mathématiques, nous sommes davantage des serviteurs que des maîtres.

Charles Hermite

10. CONTINUITÉ

Définition

Soit une fonction f définie en un réel x_0.

• f est *continue* en x_0 lorsque f admet une limite finie en x_0, cette limite étant nécessairement égale à $f(x_0)$.

• f est *continue à droite* en x_0 lorsque $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

• f est *continue à gauche* en x_0 lorsque $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Continuité, continuité à droite, à gauche

Une fonction f définie en x_0 est continue en x_0 si, et seulement si, f est continue à gauche et à droite en x_0.

Prolongement par continuité

Soit une fonction f définie au voisinage d'un réel x_0, mais pas en x_0. Si f admet une limite finie ℓ en x_0, alors la fonction g, coïncidant avec f sur D_f, et telle que $g(x_0) = \ell$, est continue en x_0.

La fonction g s'appelle le *prolongement par continuité* de f en x_0.

Continuité sur un intervalle

On dit qu'une fonction est continue sur un intervalle I si elle est continue en tout point de I. L'ensemble des fonctions continues sur l'intervalle I est noté $C^0(I)$.

Continuité et fonctions usuelles

Les fonctions polynomiales (en particulier les fonctions constantes), les fonctions rationnelles (quotient de fonctions polynomiales), la fonction *valeur absolue*, les fonctions *logarithme népérien* et *exponentielle*, les fonctions puissances (en particulier la fonction *racine carrée*), les fonctions *sinus*, *cosinus* et *tangente* ainsi que la fonction *Arctan*, sont continues là où elles sont définies.

Continuité et opérations

Si les fonctions f et g sont continues sur un intervalle I, alors :

- $f+g$, λf (où λ est un réel) et $f\,g$ sont continues sur I.
- Si, de plus, g ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue sur I.

Continuité et composition

Si f est continue sur l'intervalle I, à valeurs dans l'intervalle J, et si g est continue sur J, alors $g \circ f$ est continue sur I.

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit une fonction f continue sur $[a, b]$, avec $a < b$. Quel que soit le réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe (au moins) un réel c appartenant à $[a, b]$ tel que $f(c) = \lambda$.

Conséquence :

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Image d'un segment

Si une fonction f est continue sur le segment $\left[a,b\right]$, alors f est bornée sur $\left[a,b\right]$ et atteint ses bornes.

Théorème de la bijection

Si une fonction f est continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors f définit une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle $J = f(I)$, image de I par f.

En outre, la bijection réciproque f^{-1} (bijection de J sur I) est continue sur J, possède le même sens de variation que f, et les courbes représentatives de f et f^{-1} dans un repère orthonormé sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

11. DÉRIVABILITÉ

Définition

Soit une fonction f définie en un réel x_0.

• La fonction f est *dérivable* en x_0 si $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite finie lorsque x tend vers x_0. Cette limite est alors notée $f'(x_0)$ et s'appelle *nombre dérivé* de f en x_0.

• La fonction f est *dérivable à droite* (ou *à gauche*) en x_0 lorsque $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite à droite (ou à gauche) en x_0.
Cette limite est alors appelée *nombre dérivé de f à droite* (ou *à gauche*) *en* x_0, que l'on note $f'_d(x_0)$ (ou $f'_g(x_0)$).

Lien entre dérivée, dérivée à droite, à gauche

La fonction f est dérivable en x_0 si, et seulement si, f est dérivable à droite et à gauche en x_0, et si de plus $f'_d(x_0)=f'_g(x_0)$.

Dérivées et tangentes

• Si la fonction f est dérivable en x_0, alors (C_f) admet une tangente au point $(x_0, f(x_0))$ d'équation : $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

Si la fonction f n'est pas dérivable en x_0 mais admet une dérivée à gauche (ou à droite) en x_0, alors on parle de *demi tangente*.

• Si $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite infinie lorsque x tend vers x_0, alors (C_f) admet une tangente *verticale* au point $(x_0, f(x_0))$.

Classe des fonctions

Si f est dérivable k fois sur un intervalle I et si $f^{(k)}$ est continue sur I, alors on dit que f est *de classe* C^k sur I.
On note $C^k(I)$ l'ensemble des fonctions f de classe C^k sur I.

Dérivabilité et classe des fonctions usuelles

Les fonctions polynomiales, rationnelles, trigonométriques, *exponentielle* et *logarithme*, sont dérivables et même de classe C^1 là où elles sont définies. Les fonctions *valeur absolue*, *racine carrée*, $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$), ne sont pas dérivables en 0.

Dérivées des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$
$x^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R}^*)$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
$\ln\lvert x\rvert$	$\dfrac{1}{x}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\mathrm{Arctan}\, x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$

Si *u* et *v* sont des fonctions dérivables :

$(u+\lambda v)' = u' + \lambda v'$	$(u \circ v)' = (u' \circ v) \times v'$	$(uv)' = u'v + uv'$
$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	$\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(u^\alpha)' = \alpha u' u^{\alpha-1}$	$(\ln\lvert u\rvert)' = \dfrac{u'}{u}$	$(\mathrm{Arctan}\, u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
$(e^u)' = u' e^u$	$(\sin u)' = u' \cos u$	$(\cos u)' = -u' \sin u$
$(\tan u)' = u'(1+\tan^2(u)) = \dfrac{u'}{\cos^2(u)}$		

Dérivée d'une bijection réciproque

Soit une fonction f bijective d'un intervalle *I* sur un intervalle *J*, et dérivable sur *I*. Soit *y* un élément de *J*. Si f' ne s'annule pas en $f^{-1}(y)$, alors f^{-1} est dérivable en *y* et on a :

$$\boxed{(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}}$$

Dérivée et sens de variation sur un intervalle I

- Si pour tout x de I, $f'(x) \geq 0$ alors f est croissante sur I. Si de plus f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante sur I.
- Si pour tout x de I, $f'(x) \leq 0$ alors f est décroissante sur I. Si de plus f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement décroissante sur I.
- Si, pour tout x de I, on a $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

Théorème de Rolle

Soit une fonction f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Si $f(a) = f(b)$, alors il existe un réel c de $]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Égalité des accroissements finis

Si une fonction f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, alors il existe un réel c de $]a,b[$ tel que :

$$\boxed{f(b) - f(a) = (b-a) f'(c) \text{ c'ezs}}$$

Inégalités des accroissements finis

Si f est dérivable sur un intervalle I et s'il existe deux réels m et M tels que, pour tout réel x de I, on a $m \leq f'(x) \leq M$, alors :

$$\boxed{\forall (a, b) \in I^2,\ a \leq b,\ \ m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)}$$

Si f est dérivable sur un intervalle I et s'il existe un réel k tel que, pour tout réel x de I, on a $|f'(x)| \leq k$, alors :

$$\boxed{\forall (a, b) \in I^2,\ |f(b) - f(a)| \leq k|b-a|}$$

Théorème de prolongement de la dérivée

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$. Si $\lim_{x \to a} f'(x) = \ell$ alors f est de classe C^1 sur I, et on a de plus : $f'(a) = \ell$.

Formule de Leibniz

$$\forall (f,g)\in \left(C^n(I)\right)^2,\ \forall x\in I,\ (f\,g)^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$$

Point critique

Soit une fonction *f* dérivable sur un intervalle *I*. On appelle *point critique* de f tout réel *x* de *I* tel que $f'(x)=0$.

Condition nécessaire d'extremum

Si *f* est une fonction est dérivable sur un intervalle **ouvert** *I* et si *f* possède un extremum local sur *I*, alors c'est en un point critique.

Condition suffisante d'extremum

Soit une fonction *f* de classe C^2 sur un intervalle **ouvert** *I* et x_0 un point critique de *f*.

Si $f''(x_0)>0$, alors *f* possède un minimum local en x_0.

Si $f''(x_0)<0$, alors *f* possède un maximum local en x_0.

Si $f''(x_0)=0$, alors on ne peut rien conclure.

Dérivée première et extremum

Si la fonction f est dérivable sur $]a,b[$, alors elle admet un extremum local en un réel x_0 de $]a,b[$ si, et seulement si :

$$\boxed{f'(x_0)=0 \text{ et } f' \text{ change de signe en } x_0}$$

Convexité, concavité

Une fonction *f* est *convexe* sur *I* lorsque, pour tout segment $[a,b]$ inclus dans *I*, et pour tout *t* de $[0,1]$, on a :

$$\boxed{f(ta+(1-t)b)\le t\,f(a)+(1-t)\,f(b)}$$

Ceci signifie que la portion de (C_f) sur *I* est sous ses cordes.

Une fonction f est *concave* sur *I* lorsque, avec les mêmes notations, l'inégalité finale est :

$$f(ta+(1-t)b)\ge t\,f(a)+(1-t)\,f(b)$$

Caractérisations de la convexité

- Si une fonction f est de classe C^1 sur un intervalle I, alors :

f est convexe sur $I \Leftrightarrow f'$ est croissante sur I

$\Leftrightarrow$ la portion de (C_f) sur I est au-dessus de chacune de ses tangentes.

- Si une fonction f est de classe C^2 sur I, alors :

$$\boxed{f \text{ est convexe sur } I \Leftrightarrow \forall x \in I,\ f''(x) \geq 0}$$

Généralisation de l'inégalité de convexité

Soit n un entier naturel non nul, f une fonction convexe sur l'intervalle I et $(\lambda_1,...,\lambda_n)$ un n-uplet d'éléments de $[0,1]$ tels que $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k = 1$. On a : $\forall(x_1,...,x_n) \in I^n$, $f\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n}\lambda_k f(x_k)$.

Point d'inflexion

On dit que le point $(x_0, f(x_0))$ est un *point d'inflexion* de la courbe (C_f) lorsque (C_f) change de concavité en ce point.

Caractérisation de l'inflexion

Si f est de classe C^2 sur un intervalle d'extrémités a et b et si x_0 est dans $]a,b[$, alors (C_f) a un point d'inflexion en $(x_0, f(x_0))$ si, et seulement si, f'' s'annule en changeant de signe en x_0.

"Inégalités de convexité" classiques

Il faut savoir prouver les inégalités suivantes :
Convexité de la fonction exponentielle :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geq 1 + x$$

Concavité de la fonction logarithme :

$$\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leq x$$

Concavité de la fonction sinus :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \sin x \leq x$$

12. SUITES

Majorants, minorants

- La suite (u_n) est *majorée* si : $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M$.
- La suite (u_n) est *minorée* si : $\exists m \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq m$.
- La suite (u_n) est *bornée* si elle est à la fois majorée et minorée.

Sens de variation

- La suite (u_n) est *croissante* si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq u_n$.
- La suite (u_n) est *décroissante* si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leq u_n$.
- On définit la stricte croissance et la stricte décroissance en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes.
- La suite (u_n) est *monotone* si elle est croissante ou décroissante.
- La suite (u_n) est *constante* si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n$.
- La suite (u_n) est *stationnaire* si : $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ u_{n+1} = u_n$.

Convergence

La suite (u_n) *converge* vers $\ell \in \mathbb{R}$, et on note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$, si :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ \left| u_n - \ell \right| \leq \varepsilon}$$

Une suite qui n'est pas convergente est dite *divergente*.

Convergence et suite bornée

Toute suite convergente est bornée (la réciproque est fausse).

Limite infinie

On dit que (u_n) tend vers $+\infty$, et on écrit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, lorsque :

$$\boxed{\forall A > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ u_n \geq A}$$

On dit que (u_n) tend vers $-\infty$, et on écrit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$, lorsque :

$$\boxed{\forall B < 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ u_n \leq B}$$

Convergence et opérations

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	ℓ	ℓ
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n)$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$+\infty$	$-\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\pm\infty$	$\ell \neq 0$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n)$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	FI
FI : forme indéterminée	la règle des signes donne le signe de la limite du produit		

Limite de l'inverse d'une suite

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\pm\infty$	$\ell \neq 0$	0^-	0^+
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n}$	0	$\dfrac{1}{\ell}$	$-\infty$	$+\infty$

Théorème de la limite monotone

Si (u_n) est croissante et majorée, alors (u_n) est convergente.
Si (u_n) est croissante mais non majorée, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
Si (u_n) est décroissante et minorée, alors (u_n) est convergente.
Si (u_n) est décroissante mais non minorée, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Théorème de prolongement des inégalités

Soit deux suites (u_n) et (v_n) telles que $u_n \leq v_n$, au moins à partir d'un certain rang.
Si (u_n) converge vers ℓ_1 et (v_n) converge vers ℓ_2, alors $\ell_1 \leq \ell_2$.

Si l'on a $u_n < v_n$ à la place de $u_n \leq v_n$, la conclusion reste $\ell_1 \leq \ell_2$.

Théorème d'encadrement

Soit trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) telles que $v_n \leq u_n \leq w_n$, au moins à partir d'un certain rang. Si (v_n) et (w_n) convergent vers la même limite ℓ, alors (u_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Théorème de comparaison

Soit deux suites (u_n) et (v_n) telles que $u_n \leq v_n$, au moins à partir d'un certain rang.

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Convergence et composition

Soit une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et une suite (u_n).

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ et si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$.

Théorème du point fixe

Soit une suite (u_n) vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et si f est continue en ℓ, alors on a :

$$f(\ell) = \ell$$

Suites extraites de rang pair et de rang impair

Si (u_n) est telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \ell$, alors la suite (u_n) converge et de plus :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

12. Suites

Suites adjacentes

On dit que deux suites (u_n) et (v_n) sont *adjacentes* lorsque l'une est croissante, l'autre décroissante, et $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.

Convergence des suites adjacentes

Deux suites adjacentes (u_n) et (v_n) sont convergentes, et de plus, elles ont la même limite ℓ.
Si la suite (u_n) est croissante et si la suite (v_n) est décroissante, alors on a :

$$\forall m \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_m \leq \ell \leq v_n$$

&

Les mathématiques sont une gymnastique de l'esprit
et une préparation à la philosophie.

Isocrate

13. NÉGLIGEABILITÉ ET ÉQUIVALENCE (SUITES)

Négligeabilité

La suite (u_n) est *négligeable* devant la suite (v_n) lorsqu'il existe une suite (ε_n) qui converge vers 0 et qui vérifie $u_n = \varepsilon_n v_n$ (à partir d'un certain rang). On note : $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$.

Caractérisation de la négligeabilité

Si au voisinage de $+\infty$, $v_n \neq 0$, alors :

$$u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n) \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$$

Négligeabilité et opérations

- Si $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$ et $v_n \underset{+\infty}{=} o(w_n)$, alors : $u_n \underset{+\infty}{=} o(w_n)$.
- Si $u_n \underset{+\infty}{=} o(w_n)$ et $v_n \underset{+\infty}{=} o(w_n)$, alors :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ au_n + bv_n \underset{+\infty}{=} o(w_n)$$

Négligeabilités usuelles

$$\forall (\alpha, \beta) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \forall q > 1,\ (\ln n)^\beta \underset{+\infty}{=} o(n^\alpha),\ n^\alpha \underset{+\infty}{=} o(q^n) \text{ et } q^n \underset{+\infty}{=} o(n!)$$

Équivalence

Les suites (u_n) et (v_n) sont *équivalentes* s'il existe une suite (α_n) qui converge vers 1 et qui vérifie $u_n = \alpha_n v_n$. On note : $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.

Lien entre équivalence et négligeabilité

$$\boxed{u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \Leftrightarrow u_n \underset{+\infty}{=} v_n + o(v_n)}$$

En d'autres termes :

$$\boxed{v_n + o(v_n) \underset{+\infty}{\sim} v_n}$$

Caractérisation de l'équivalence

Si au voisinage de $+\infty$, $v_n \neq 0$, alors :

$$\boxed{u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1}$$

Équivalence et opérations

- Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et si $t_n \underset{+\infty}{\sim} w_n$, alors : $u_n t_n \underset{+\infty}{\sim} v_n w_n$.
- Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et si $u_n \neq 0$ et $v_n \neq 0$, alors $\dfrac{1}{u_n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{v_n}$.
- Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, si $u_n > 0$ et $v_n > 0$, alors quel que soit le réel a strictement positif : $u_n{}^a \underset{+\infty}{\sim} v_n{}^a$ (avec a indépendant de n).

L'équivalence n'est en général pas compatible avec l'addition des suites et la composition par une fonction.

Équivalents usuels

On désigne par α un réel non nul, indépendant de n.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, alors :

$\ln(1+u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n$	$e^{u_n} - 1 \underset{+\infty}{\sim} u_n$	$(1+u_n)^\alpha - 1 \underset{+\infty}{\sim} \alpha u_n$
$\sin u_n \underset{+\infty}{\sim} u_n$	$1 - \cos u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2} u_n^2$	$\tan u_n \underset{+\infty}{\sim} u_n$

Équivalents et limites

- Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.
- Si (u_n) converge vers un réel ℓ **non nul**, alors $u_n \underset{+\infty}{\sim} \ell$.

14. SUITES USUELLES

Suites arithmétiques

On dit que la suite (u_n) est *arithmétique* s'il existe un réel r, indépendant de n, appelé *raison* de (u_n), tel que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r}$$

Forme explicite d'une suite arithmétique

Soit une suite arithmétique (u_n) de raison r. On a alors :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nr}$$

Plus généralement, on a :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ \forall n \geq p,\ u_n = u_p + (n-p)r}$$

Suites géométriques

On dit que la suite (u_n) est *géométrique* s'il existe un réel q, indépendant de n, appelé *raison* de (u_n), tel que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = q u_n}$$

Forme explicite d'une suite géométrique

Soit une suite géométrique (u_n) de raison q. On a alors :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 q^n}$$

Plus généralement, on a :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ \forall n \geq p,\ u_n = u_p\, q^{n-p}}$$

Convergence de la suite (q^n)

$\lvert q \rvert < 1$	$q = 1$	$q > 1$	$q \leq -1$
$\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$	$\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$	$\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$	(q^n) diverge

Suites arithmético-géométriques

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *arithmético-géométrique* lorsqu'il existe deux réels a et b, indépendants de n, avec $a \neq 1$, tels que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = a u_n + b}$$

Étude d'une suite arithmético-géométrique

Si x est le réel vérifiant $x = ax + b$, alors la suite $(u_n - x)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison a, ce qui permet d'obtenir $u_n - x$, puis u_n.

Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (SRL 2)

La suite (u_n) vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 lorsqu'il existe deux réels a et b, indépendants de n, tels que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n}$$

(E) : $x^2 - ax - b = 0$ est appelée *équation caractéristique* de (u_n).

Forme explicite des SRL 2

• Si (E) admet deux solutions r_1 et r_2 distinctes, alors :

$$\boxed{\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n}$$

• Si (E) admet une seule solution r, alors :

$$\boxed{\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\lambda + \mu n) r^n}$$

Il n'y a pas de place durable dans le monde
pour les mathématiques laides.

Godfrey Hardy

15. SÉRIES

Somme partielle

Soit une suite (u_n). On appelle *suite des sommes partielles* de la série Σu_n la suite (S_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Nature d'une série

La série Σu_n *converge* lorsque la suite (S_n) des sommes partielles associée converge. Dans ce cas, la limite de (S_n) est appelée *somme de la série* Σu_n. On a donc, en cas de convergence :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Dans le cas contraire, on dit que la série *diverge*.

Condition nécessaire de convergence

Si la série Σu_n converge, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Séries et combinaisons linéaires

Si les séries Σu_n et Σv_n convergent, alors quels que soient les réels a et b, la série $\Sigma(au_n + bv_n)$ converge. Dans ce cas, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (au_n + bv_n) = a\sum_{n=0}^{+\infty} u_n + b\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Reste d'une série convergente

Si la série Σu_n converge, alors on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k = 0$.

La quantité $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est appelée *reste d'ordre n de la série* Σu_n.

Séries télescopiques

Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(u_{k+1}-u_k\right)=u_n-u_0$$

Il faut savoir en déduire le résultat suivant :

La série de terme général $u_{n+1}-u_n$ converge si, et seulement si, la suite $\left(u_n\right)$ converge.

Si c'est le cas, en notant $\ell=\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left(u_{k+1}-u_k\right)=\ell-u_0$$

Séries absolument convergentes

La série Σu_n *converge absolument* lorsque la série $\Sigma|u_n|$ converge.

Toute série absolument convergente est convergente.

Absolue convergence et sommation

Si une série converge absolument, alors on ne change ni sa nature, ni sa somme, en changeant l'ordre de sommation de ses termes.

Sommes partielles des séries à termes positifs

La suite (S_n) des sommes partielles associée à une série Σu_n à termes positifs est croissante (car $S_{n+1}-S_n=u_{n+1}\geq 0$).

- Si (S_n) est majorée alors la série Σu_n converge.
- Sinon, la série diverge et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=+\infty$.

Critère d'équivalence

Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et si les séries Σu_n et Σv_n sont à termes positifs (à partir d'un certain rang), alors elles sont de même nature.

Critère de comparaison

Supposons que $0 \leq u_n \leq v_n$ (à partir d'un certain rang).

- Si la série Σv_n converge, alors la série Σu_n converge aussi.
- Si la série Σu_n diverge, alors la série Σv_n diverge aussi.

Critère de négligeabilité

Si $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$ et si la série Σv_n est à termes positifs et convergente alors la série Σu_n converge.

Séries géométriques

Les séries $\sum q^k$, $\sum kq^{k-1}$ et $\sum k(k-1)q^{k-2}$, où q est un réel ne dépendant pas de k, sont appelées *séries géométriques* (*dérivées d'ordre* 1 et 2 pour les deux dernières). Elles convergent si et seulement si $|q| < 1$. On a alors :

$\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$	$\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$	$\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$

Séries de Riemann

On appelle *série de Riemann* toute série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, où α est un réel ne dépendant pas de n. Elle converge si, et seulement si : $\alpha > 1$.

Séries exponentielles

On appelle *série exponentielle* toute série $\sum \frac{x^n}{n!}$, où x est un réel ne dépendant pas de n. Elle converge pour tout réel x, et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

16. INTÉGRATION SUR UN SEGMENT

Primitive

Soit une fonction f continue sur un intervalle I. On appelle primitive de f sur I toute fonction F telle que :

$$\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$$

Intégrale et primitive

Soit une fonction f continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I. On a l'égalité fondamentale suivante :

$$\boxed{\forall (a,b) \in I^2,\ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)}$$

Primitive qui s'annule en *a*

Soit une fonction f continue sur un intervalle I, a un élément de I et G la fonction définie par :

$$\forall x \in I,\ G(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

La fonction G est de classe C^1 sur I et c'est **la** primitive de f qui s'annule en a. On dit que G est une *intégrale fonction de sa borne supérieure* et on a : $\forall x \in I,\ G'(x) = f(x)$.

Tableaux des primitives

$f(x)$	$F(x)$
a ($a \in \mathbb{R}$)	ax
x^α ($\alpha \neq -1$)	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\cos x$	$\sin x$
e^x	e^x
$\ln x$	$x \ln x - x$

$f(x)$	$F(x)$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
$\sin x$	$-\cos x$
a^x $a > 0$	$\dfrac{a^x}{\ln a}$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{Arc}\tan x$

f	F
$au'+bv'$ $(a,b)\in\mathbb{R}^2$	$au+bv$
$u'u^{\alpha}$ $(\alpha\neq-1)$	$\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$u'\cos u$	$\sin u$
$u'\mathrm{e}^u$	e^u
Dans ce tableau u et v sont des fonctions	

f	F
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$u'\sin u$	$-\cos u$
$u'a^u$ $(a>0)$	$\dfrac{a^u}{\ln a}$
$\dfrac{u'}{1+u^2}$	$\operatorname{Arctan} u$

Linéarité de l'intégration

Soit deux fonctions f et g continues sur le segment $[a,b]$. On a :

$$\boxed{\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\ \int_a^b(\lambda f(x)+\mu g(x))\,\mathrm{d}x=\lambda\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\mu\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}$$

Relation de Chasles

Soit une fonction f continue sur un intervalle I.

$$\boxed{\forall(a,b,c)\in I^3,\ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x}$$

Positivité de l'intégrale

Si f est continue, positive sur $[a,b]$, avec $a\leq b$, alors on a :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\geq 0}$$

Cas de stricte positivité

• Si une fonction f est continue, positive sur $[a,b]$, avec $a<b$, et si f n'est pas la fonction nulle, alors on a : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x>0$.

• Si une fonction f est continue, positive sur $[a,b]$, si $a<b$, et si $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=0$, alors f est identiquement nulle sur $[a,b]$.

Croissance de l'intégrale

Soit deux fonctions f et g continues sur $[a,b]$, avec $a \leq b$.
Si pour tout réel x de $[a,b]$, on a $f(x) \leq g(x)$, alors :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}$$

Inégalité triangulaire

Si a et b sont deux réels tels que $a \leq b$ et si f est une fonction continue sur $[a,b]$, alors on a : $\boxed{\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t}$

Sommes de Riemann

Soit une fonction f continue sur $[a,b]$ et un entier naturel n non nul.
On appelle *sommes de Riemann* associées à f sur $[a,b]$ les sommes

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \quad \text{et} \quad T_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right).$$

On a alors :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} T_n = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t}$$

Intégration par parties

Pour toutes fonctions u et v de classe C^1 sur $[a,b]$, on a :

$$\boxed{\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \big[u(x)v(x)\big]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x}$$

Changement de variable

Soit une fonction f continue sur un intervalle I, et φ une fonction de classe C^1 sur $[a,b]$, telle que $\varphi([a,b]) \subset I$. On a alors :

$$\boxed{\int_a^b f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,\mathrm{d}u}$$

17. FORMULES DE TAYLOR, DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Formule de Taylor avec reste intégral

Soit n un entier naturel. Si une fonction f est de classe C^{n+1} sur un intervalle I, et si a et b sont dans I ($a \le b$ ou $b \le a$), alors :

$$\boxed{f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t}$$

On dit que la formule précédente est écrite à l'ordre n.

Inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre *n*

Si f est de classe C^{n+1} sur I, si a et b sont dans I ($a \le b$ ou $b \le a$), si de plus, pour tout réel x de I, on a $\left| f^{(n+1)}(x) \right| \le M$, alors :

$$\boxed{\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \le \frac{M\left|b-a\right|^{n+1}}{(n+1)!}}$$

Formule de Taylor-Young à l'ordre *n*

Si f est de classe C^n sur I, et si a est un réel de I alors, lorsque x est au voisinage de a, on a :

$$\boxed{f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\big((x-a)^n\big)}$$

En posant $h = x - a$, on obtient, lorsque h est au voisinage de 0 :

$$\boxed{f(a+h) \underset{0}{=} f(a) + f'(a)\frac{h}{1!} + f''(a)\frac{h^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{h^n}{n!} + o(h^n)}$$

Développement limité d'ordre *n*

On dit qu'une fonction f définie au voisinage d'un réel x_0 admet un *développement limité d'ordre n* en x_0 lorsqu'il existe $n+1$ réels $a_0, a_1, \dots, a_n$ tels que, au voisinage de x_0 :

$$f(x) \underset{x_0}{=} \underbrace{a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n}_{\text{ce polynôme est appelé la } \textit{partie régulière} \text{ du développement limité}} + o((x-x_0)^n)$$

Unicité

Si f admet un développement limité, alors il est unique.

Existence

Si une fonction est de classe C^n au voisinage de x_0, alors elle admet un développement limité d'ordre n en x_0, donné par la formule de Taylor-Young.

Développement limité et dérivabilité

Si la fonction f admet le développement limité en x_0 à l'ordre 1 suivant : $f(x) \underset{x_0}{=} f(x_0) + a(x-x_0) + o(x-x_0)$, alors f est dérivable en x_0, et dans ce cas, $a = f'(x_0)$.

Combinaison linéaire de développements limités

Si deux fonctions f et g admettent chacune un développement limité en 0, à l'ordre n (on note P le polynôme définissant la partie régulière de f, et Q celui définissant celle de g), alors quels que soient les réels a et b, $af + bg$ admet un développement limité en 0, à l'ordre n.
Le polynôme définissant la partie régulière du développement limité de $af + bg$ est $aP + bQ$.

Produit de développements limités

Si deux fonctions f et g admettent chacune un développement limité en 0, à l'ordre n (on note P le polynôme définissant la partie régulière de f, et Q celui définissant celle de g), alors fg admet un développement limité en 0, à l'ordre n.
On obtient la partie régulière du développement limité de fg en ne conservant que les termes dont le degré est inférieur ou égal à n dans le produit PQ.

Développements limités et équivalents

S'il existe deux entiers naturels p et n tels que $p \leq n$ pour lesquels on a $f(x) \underset{0}{=} a_p x^p + \ldots + a_n x^n + o(x^n)$, avec $a_p \neq 0$, alors :

$$f(x) \underset{0}{\sim} a_p x^p$$

Développements limités usuels

$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ (1+u)^\alpha \underset{0}{=} 1 + \frac{\alpha}{1!}u + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}u^n + o(u^n)$
$\ln(1+u) \underset{0}{=} u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{u^n}{n} + o(u^n)$
$\mathrm{e}^u \underset{0}{=} 1 + \frac{u}{1!} + \frac{u^2}{2!} + \ldots + \frac{u^n}{n!} + o(u^n)$
$\sin u \underset{0}{=} u - \frac{u^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(u^{2n+1})$
$\cos u \underset{0}{=} 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{u^{2n}}{(2n)!} + o(u^{2n})$

Cas particuliers du premier développement limité

Il faut savoir retrouver les résultats suivants :

Avec $\alpha = -1$:

$$\frac{1}{1+u} \underset{0}{=} 1 - u + u^2 - u^3 + \ldots + (-1)^n u^n + o(u^n)$$

Avec $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\sqrt{1+u} \underset{0}{=} 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + o\left(u^2\right)$$

Avec $\alpha = -\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{\sqrt{1+u}} \underset{0}{=} 1 - \frac{1}{2}u + \frac{3}{8}u^2 + o\left(u^2\right)$$

&

Nous devons plutôt nous fier au calcul algébrique
qu'à notre jugement

Leonhard Euler

18. INTÉGRALES IMPROPRES

Nature d'une intégrale impropre

Si f est continue sur $[a,b[$, avec b réel ou $b=+\infty$, on dit que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ *converge* si $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque x tend vers b.
On a alors :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to b}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t}$$

Si f est continue sur $]a,b]$, avec a réel ou $a=-\infty$, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ *converge* si $\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque x tend vers a.
On a alors :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to a}\int_x^b f(t)\mathrm{d}t}$$

On dit qu'une intégrale *diverge* si elle n'est pas convergente.

Reste d'une intégrale convergente

Si l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$, impropre en b, converge, alors $\lim\limits_{x\to b^-}\int_x^b f(t)\mathrm{d}t=0$. On dit que *le reste d'une intégrale impropre convergente tend vers* 0.

Intégrale "faussement" impropre

Si une fonction f est continue sur $[a,b[$, et prolongeable par continuité en b, alors l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge. En notant $\tilde{f}$ ce prolongement, on a : $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \tilde{f}(t)\mathrm{d}t$.

On dit parfois que l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est "*faussement*" *impropre*.

Intégrale deux fois impropre

L'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$, impropre en a et en b, est dite convergente lorsque, pour un réel c arbitrairement choisi dans $]a,b[$, les deux intégrales, chacune une fois impropre, $\int_a^c f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_c^b f(t)\mathrm{d}t$ convergent. On pose alors :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t}$$

Si au moins l'une des deux intégrales $\int_a^c f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_c^b f(t)\mathrm{d}t$ diverge, l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est divergente.

Linéarité

Si les intégrales $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ convergent, alors quels que soient les réels λ et μ, l'intégrale $\int_a^b (\lambda f(t)+\mu g(t))\mathrm{d}t$ converge et on a :

$$\boxed{\int_a^b (\lambda f(t)+\mu g(t))\mathrm{d}t = \lambda\int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \mu\int_a^b g(t)\mathrm{d}t}$$

Relation de Chasles

Soit une fonction f continue sur $[a,b[$, et un réel c de $[a,b[$. Si l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge, alors :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t}$$

Positivité de l'intégrale

On suppose que $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

Si f est positive sur $]a,b[$ et si l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge, alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geq 0$.

Cas de stricte positivité

On suppose que $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

Si une fonction f est continue, positive sur $[a,b[$ et si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors f est identiquement nulle sur $[a,b[$.

Croissance de l'intégrale

On suppose que $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

Si pour tout réel t de $]a,b[$, $f(t) \leq g(t)$ et si les intégrales impropres $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent, alors on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Intégration par parties

On ne procède pas à une intégration par parties sur une intégrale impropre. On se ramène à une intégrale définie sur un segment, on fait l'intégration par parties, puis on passe à la limite.

Changement de variable

Soit une fonction f continue sur $]a,b[$ et φ une bijection de classe C^1 **strictement croissante**, de $]\alpha,\beta[$ sur $]a,b[$ (a, b, α et β réels ou infinis). Les intégrales $\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature, et en cas de convergence, on a :

$$\boxed{\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t}$$

Soit une fonction f continue sur $]a,b[$ et φ une bijection de classe C^1 **strictement décroissante**, de $]\alpha,\beta[$ sur $]a,b[$ (a, b, α et β réels ou infinis). Les intégrales $\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$ et $\int_\beta^\alpha f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature, et en cas de convergence, on a :

$$\boxed{\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \int_\beta^\alpha f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t}$$

Parité-imparité

Si f est **paire** et si $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors on a :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t}$$

Si f est **impaire** et si $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors on a :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 0}$$

Intégrale de fonction positive

Si f est continue et positive sur $[a,b[$ (b réel ou $+\infty$), $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge* si, et seulement si, $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée sur $[a,b[$.

Critère d'équivalence

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a,b[$.

Si f et g sont de signe constant au voisinage de b et si $f(t) \underset{b}{\sim} g(t)$, alors les intégrales $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Critère de comparaison

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a,b[$.

- Si, au voisinage de b, $0 \le f(t) \le g(t)$, et si $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
- Si, au voisinage de b, $0 \le f(t) \le g(t)$, et si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, alors $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

Critère de négligeabilité

Si f et g sont continues sur $[a,b[$ et positives au voisinage de b, si $f(t) \underset{b}{=} o(g(t))$ et si $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ converge, alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge.

Convergence absolue

$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est *absolument convergente* si $\int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$ converge.

Toute intégrale absolument convergente est convergente, mais la réciproque est fausse.

Inégalité triangulaire

Si l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente, et si $a \leq b$,

alors : $\boxed{\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t}$

Intégrales de Riemann

- Pour tout réel $a > 0$: $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ converge $\Leftrightarrow$ $\alpha > 1$.
- Pour tous réels a et b ($a < b$) : $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}\mathrm{d}x$ converge $\Leftrightarrow$ $\alpha < 1$.

Autres intégrales de référence

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$ converge si, et seulement si : $\lambda > 0$.

Fonction gamma

L'intégrale $\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1}\,\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ converge si et seulement si : $t > 0$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \Gamma(t+1) = t\,\Gamma(t)\\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Gamma(n) = (n-1)!\end{array}}$$

19. FONCTIONS DE *N* VARIABLES : CONTINUITÉ

L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de la norme euclidienne usuelle.

Parties ouvertes, parties fermées

Une partie Ω de $\mathbb{R}^n$ est un *ouvert* si elle est vide, ou si, pour tout point x_0 de Ω, il existe un réel $r > 0$ tel que tout point x vérifiant $\|x - x_0\| < r$ appartient à Ω.

Une partie est *fermée* si son complémentaire est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Le programme officiel est rassurant : « *La détermination de la nature topologique (ouvert ou fermé) d'un ensemble n'est pas un objectif du programme ; elle devra toujours être précisée* ».

Opérations sur les ouverts, sur les fermés

Une intersection finie d'ouverts de $\mathbb{R}^n$, une réunion quelconque d'ouverts de $\mathbb{R}^n$, sont des ouverts de $\mathbb{R}^n$.

Exemples fondamentaux d'ouverts

Si φ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$ et a un réel, alors les ensembles $\{x \in \mathbb{R}^n,\ \varphi(x) < a\}$ et $\{x \in \mathbb{R}^n,\ \varphi(x) > a\}$ sont ouverts.

Partie bornée

Une partie U de $\mathbb{R}^n$ est *bornée* si : $\boxed{\exists r \geq 0, \forall x \in U,\ \|x\| \leq r}$

Graphe

On appelle *graphe* de f l'ensemble des points $(x_1, ..., x_n, y)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$, vérifiant l'équation : $y = f(x_1, ..., x_n)$.

Lignes de niveau

Soit une fonction f définie sur une partie U de $\mathbb{R}^n$.
Pour tout réel λ, $\{x \in U,\ f(x) = \lambda\}$ est la ligne de niveau λ de f.

Continuité

Une fonction f est continue en un point a de l'ouvert U lorsque :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists r > 0,\ \forall x \in U,\ \left(\|x-a\| < r \Rightarrow \left| f(x) - f(a) \right| \leq \varepsilon \right)}$$

Elle est continue sur U si elle est continue en tout point de U.

Continuité et opérations

- Toute fonction polynomiale de n variables est continue sur $\mathbb{R}^n$.
- Somme, combinaisons linéaires, produit et quotient bien défini de fonctions continues sur U, sont continues sur U.
- Si f est continue sur U, à valeurs dans une partie I de $\mathbb{R}$, et si φ est continue sur I, alors $\varphi \circ f$ est continue sur U.

&

Un mathématicien,
c'est une machine qui transforme le café en théorèmes.

Alfred Renyi

20. FONCTIONS DE *N* VARIABLES : CALCUL DIFFÉRENTIEL D'ORDRE 1

Dans ce chapitre, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Dérivées partielles d'ordre 1

Soit $a=(a_1,...,a_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n$.

• On appelle dérivée partielle d'ordre 1 de *f* en *a* par rapport à la i e variable, le réel défini par la limite suivante, si elle existe :

$$\partial_i f(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a_1,...,a_{i-1},a_i+h,a_{i+1},...,a_n)-f(a)}{h}$$

• Si $\partial_i f(a)$ existe pour tout point *a* de Ω, la fonction définie sur Ω par $(x_1,...,x_n)\mapsto \partial_i f(x_1,...,x_n)$ est la fonction dérivée partielle d'ordre 1 de *f* par rapport à la i e variable.

Gradient

Si *f* admet une dérivée partielle en *a* par rapport à x_i pour tout *i* de $[\![1,n]\!]$, le gradient de *f* en *a* est le vecteur noté $\nabla f(a)$, défini par : $\nabla f(a)=\left(\partial_1 f(a),...,\partial_n f(a)\right)$.

Fonction de classe C^1

Une fonction *f* est de classe C^1 sur Ω, si elle y admet des dérivées partielles continues par rapport à chaque variable.

Classe C^1 et opérations

• Toute fonction polynomiale de *n* variables est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$.
• Somme, combinaisons linéaires, produit et quotient bien défini de fonctions de classe C^1 sur Ω, sont de classe C^1 sur Ω.
• Si *f* est de classe C^1 sur Ω, à valeurs dans une partie *I* de $\mathbb{R}$, et si φ est de classe C^1 sur *I* à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors $\varphi\circ f$ est de classe C^1 sur Ω.

Dérivée de la fonction g : $t \mapsto f(a+tu)$

Si f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$, si a est un point de $\mathbb{R}^n$ et si u est un vecteur de $\mathbb{R}^n$, alors la fonction $g : t \mapsto f(a+tu)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel t, on a : $g'(t) = \langle \nabla f(a+tu), u \rangle$.

On a, en particulier : $g'(0) = \langle \nabla f(a), u \rangle$

Interprétation du gradient

Le gradient $\nabla f(a)$, s'il n'est pas nul, donne la direction dans laquelle la variation de f au voisinage de a est la plus forte. Il est orthogonal aux lignes de niveau.

Développement limité d'ordre 1

Si f est de classe C^1 sur Ω, alors pour tout point a de Ω, il existe une fonction ε continue en (0, 0, …, 0) telle que $\varepsilon(0,...,0) = 0$ et vérifiant pour tout $h = (h_1, \ldots, h_n)$ tel que $a+h \in \Omega$:

$$\boxed{f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \| h \| \varepsilon(h)}$$

Ceci s'écrit également :

$$\boxed{f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} h_i \partial_i f(a) + \sqrt{h_1^2 + \cdots + h_n^2}\, \varepsilon(h_1, ..., h_n)}$$

&

L'étude des mathématiques,
en comprimant la sensibilité et l'imagination,
rend quelquefois l'explosion des passions terrible.

Monseigneur Dupanloup

21. FONCTIONS DE *N* VARIABLES : CALCUL DIFFÉRENTIEL D'ORDRE 2

La fonction f est définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$.

Dérivées partielles d'ordre 2

Soit deux entiers i et j de $[\![1,n]\!]$.

On définit, sous réserve d'existence, la dérivée partielle d'ordre 2 de f par rapport à la j^{e} variable, puis par rapport à la i^{e} variable, de la façon suivante :

$$\boxed{\partial^2_{i,j} f = \partial_i\left(\partial_j f\right)}$$

Fonction de classe C^2

On dit que f est de classe C^2 sur Ω si f admet des dérivées partielles d'ordre 2 toutes continues sur Ω.

Théorème de Schwarz

Si f est de classe C^2 sur Ω, alors on a :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad \partial^2_{i,j} f = \partial^2_{j,i} f$$

Hessienne

Si f est de classe C^2 sur Ω, alors pour tout point a de Ω, on appelle *hessienne* de f en a la matrice suivante :

$$\boxed{\nabla^2 f(a) = \left(\partial^2_{i,j} f(a)\right)_{1\le i,j\le n}}$$

$\nabla^2 f(a)$ est symétrique et on note q_a la fonction quadratique associée.

Classe C^2 et opérations

• Toute fonction polynomiale de n variables est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$.
• Somme, combinaisons linéaires, produit et quotient bien défini de fonctions de classe C^2 sur Ω, sont de classe C^2 sur Ω.
• Si f est de classe C^2 sur Ω, à valeurs dans une partie I de $\mathbb{R}$, et si φ est de classe C^2 sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors $\varphi \circ f$ est de classe C^2 sur Ω.

Dérivée seconde de la fonction g : t$\mapsto$ f(a+tu)

Si f est de classe C^2 sur Ω, alors pour tout a de Ω et tout u normé de $\mathbb{R}^n$, la fonction $g : t \mapsto f(a+tu)$ est dérivable deux fois en tout t tel que $a+tu \in \Omega$ et on a : $g''(u) = q_{a+tu}(u)$.

En particulier, la valeur de sa dérivée seconde en 0 est égale à :

$$\boxed{q_a(u) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_i u_j \ \partial^2_{i,j} f(a)}$$

Développement limité d'ordre 2

Si f est de classe C^2 sur Ω, alors pour tout point a de Ω, il existe une fonction ε continue en (0, 0, …, 0) telle que $\varepsilon(0,...,0) = 0$, et vérifiant pour tout $h = (h_1,\dots, h_n)$ tel que $a+h \in \Omega$:

$$\boxed{f(a+h) = f(a) + \left\langle \nabla(f)(a), h \right\rangle + \frac{1}{2} q_a(h) + \| h \|^2 \varepsilon(h)}$$

Ceci s'écrit également :

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} h_i \partial_i f(a) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} h_i h_j \partial^2_{i,j} f(a) + (\sum_{i=1}^{n} h_i^2) \varepsilon(h)$$

22. FONCTIONS DE *N* VARIABLES : EXTREMUMS

Extremum

Une fonction f présente un *maximum local* en un point a de Ω lorsqu'il existe une boule ouverte B_a centrée en a telle que, pour tout x de $\Omega \cap B_a$, on a : $f(x) \leq f(a)$.

On dit que f présente un maximum *global* en a si :

$$\forall x \in \Omega, \quad f(x) \leq f(a)$$

On définit de même les notions de *minimum local* et de *minimum global* en changeant le sens des inégalités.
Le terme *extremum* désigne, soit un maximum, soit un minimum.

Extremums et continuité

Une fonction continue sur une partie fermée bornée admet un maximum global et un minimum global sur cette partie.

Point critique

Soit une fonction f de classe C^1 sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$.
Un point a de Ω est un point critique de f lorsque $\nabla f(a)$ est nul, c'est-à-dire :

$$\boxed{\forall i \in [\![1,n]\!], \ \partial_i f(a) = 0}$$

Condition nécessaire d'extremum

Soit une fonction f de classe C^1 sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. Si f admet un extremum en un point a de Ω, alors a est un point critique de f.

Point selle, point col

On appelle *point selle*, ou *point col*, de f, tout point critique en lequel f ne présente pas d'extremum.

Condition suffisante d'extremum avec q_a

Soit une fonction f de classe C^2 sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et ***a* un point critique** de f. On note q_a la forme quadratique associée à la hessienne $\nabla^2(f)(a)$ de f en a.

- Si pour tout vecteur h non nul de $\mathbb{R}^n$, on a $q_a(h) > 0$, alors f a un minimum local en a.
- Si pour tout vecteur h non nul de $\mathbb{R}^n$, on a $q_a(h) < 0$, alors f a un maximum local en a.
- Si q_a ne garde pas un signe constant sur $\mathbb{R}^n$, alors f n'a pas d'extremum en a.

Condition suffisante d'extremum avec ∇²f(a)

Soit une fonction f de classe C^2 sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et ***a* un point critique** de f.

- Si toutes les valeurs propres de $\nabla^2 f(a)$ sont strictement positives, alors f a un minimum local en a.
- Si toutes les valeurs propres de $\nabla^2 f(a)$ sont strictement négatives, alors f a un maximum local en a.
- Si $\nabla^2 f(a)$ possède (au moins) une valeur propre strictement positive et (au moins) une valeur propre strictement négative, alors f n'a pas d'extremum en a.

Extremums sous contrainte linéaire

Soit f une fonction définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. Si $\mathcal{C}$ désigne l'ensemble des solutions $(x_1,\ldots,x_n)$ d'un système linéaire, on appelle *extremums de f sous la contrainte linéaire* $\mathcal{C}$, les extremums de f sur l'ensemble $\Omega \cap \mathcal{C}$ (c'est-à-dire les extremums de la restriction de f à $\mathcal{C}$).

Point critique sous contrainte linéaire

Si la contrainte linéaire $\mathcal{C}$ est définie par $\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{p,1}x_1 + \cdots + a_{p,n}x_n = b_p \end{cases}$,

où les $a_{i,j}$ et les b_i sont réels, alors, en notant $\mathcal{H}$ le sous-espace vectoriel des solutions du système linéaire homogène associé (c'est-à-dire le même système où tous les b_i sont nuls), on a le résultat suivant :

> Si f est de classe C^1 sur Ω et admet un extremum en un point a sous la contrainte linéaire $\mathcal{C}$, alors :
>
> $$\nabla f(a) \perp \mathcal{H}$$
>
> Pour tout entier i de $[\![1, p]\!]$, en notant g_i la forme linéaire de $\mathbb{R}^n$ correspondant à la i^{e} ligne du système des contraintes, c'est-à-dire définie par $g_i(x_1,\dots,x_n) = a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,n}x_n$, alors on a :
>
> $$\mathcal{H}^{\perp} = \mathrm{Vect}\left(\nabla g_1(a), \nabla g_2(a),\dots,\nabla g_p(a)\right)$$
>
> Ainsi, il existe des réels λ_1, …, λ_p tels que :
>
> $$\nabla f(a) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla g_i(a)$$

&

La mathématique ne constitue pas une terre aride
dans l'univers scientifique. Elle est à la fois reine,
servante et fille des sciences de l'observation.

Gustave Choquet

Algèbre linéaire

23. MATRICES ET SYSTÈMES

Définition

- Soit $(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2$. On appelle matrice à n lignes et p colonnes tout tableau de réels de la forme suivante :

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

- On note parfois $A=(a_{i,j})$.

Ensembles des matrices

On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes.

Format des matrices

Une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est dite de *format* $n\times p$.

Égalité de deux matrices

Deux matrices sont égales si elles ont le même nombre de lignes, le même nombre de colonnes et les mêmes coefficients.

Somme de matrices

Soit deux matrices $A=(a_{i,j})$ et $B=(b_{i,j})$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

La somme de A et B est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, notée $A+B$, définie par $A+B=(c_{i,j})$ où :

$$\boxed{\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!],\ c_{i,j}=a_{i,j}+b_{i,j}}$$

Multiplication d'une matrice par un réel

Soit une matrice $A=\left(a_{i,j}\right)$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et λ un réel.

Le produit de A par λ est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, notée λA, définie par $\lambda A=\left(a'_{i,j}\right)$ où :

$$\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!],\ a'_{i,j}=\lambda a_{i,j}$$

Produit de matrices

Soit $A=\left(a_{i,j}\right)$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B=\left(b_{i,j}\right)$ une matrice de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. Le produit de A par B est la matrice de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$, notée AB, définie par $AB=\left(c_{i,j}\right)_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq q}$ où :

$$\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,q]\!],\ c_{i,j}=\sum_{k=1}^{p}a_{i,k}\,b_{k,j}$$

Le produit matriciel n’est pas commutatif.

Associativité, distributivité

Pour toutes matrices A, B, C telles que les opérations ci-dessous soient possibles, on a :

$$A(BC)=(AB)C$$
$$A(B+C)=AB+AC \text{ et } (A+B)C=AC+BC$$
$$\forall\lambda\in\mathbb{R},\ A(\lambda B)=(\lambda A)B=\lambda AB$$

Transposée d'une matrice

Soit une matrice $A=\left(a_{i,j}\right)$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On appelle *transposée* de A la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, notée ${}^{t}A$, définie par ${}^{t}A=\left(a'_{i,j}\right)$ où :

$$\forall(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,n]\!]\ \ a'_{i,j}=a_{j,i}$$

Propriétés de la transposée

$${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ {}^t(\lambda A) = \lambda\, {}^tA$$

$${}^t({}^tA) = A \qquad\qquad {}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$$

Matrices carrées

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes.

Matrices carrées particulières

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Pour tout i élément de $[\![1,n]\!]$, les réels $a_{i,i}$ sont appelés *coefficients diagonaux.*
- A est une matrice *triangulaire inférieure* si pour tout (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$ tel que $i < j$, on a : $a_{i,j} = 0$.
- A est une matrice *triangulaire supérieure* si pour tout (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$ tel que $i > j$, on a : $a_{i,j} = 0$.
- A est une matrice *diagonale* si pour tout (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, on a : $a_{i,j} = 0$.
- A est une matrice *scalaire* si elle est diagonale et si tous ses éléments diagonaux sont égaux.
- A est une matrice *symétrique* si pour tout (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$, on a : $a_{i,j} = a_{j,i}$.
- A est une matrice *antisymétrique* si pour tout (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$, on a : $a_{i,j} = -a_{j,i}$ (on a donc $a_{i,i} = 0$).

Matrice identité

La matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice diagonale dont tous les éléments diagonaux sont égaux à 1. Elle est notée I_n ou tout simplement I.

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ AI = IA = A}$$

Puissance d'une matrice carrée

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Par convention, on pose $A^0 = I_n$ et, pour tout entier naturel p non nul, on pose : $A^p = A^{p-1}A$.

En fait, pour tout p de $\mathbb{N}^*$, A^p est le produit de p matrices toutes égales à A.

Produit de matrices diagonales

Le produit de deux matrices diagonales est la matrice diagonale obtenue en multipliant entre eux les coefficients diagonaux de même place.

Puissance d'une matrice diagonale

La puissance p^{e} ($p \in \mathbb{N}$) d'une matrice diagonale est la matrice diagonale obtenue en élevant les coefficients diagonaux à la puissance p.

Formule du binôme de Newton

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent (c'est-à-dire telles que $AB = BA$). Alors pour tout entier naturel p, on a :

$$\boxed{(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^{p-k} B^k}$$

Matrices symétriques, antisymétriques

La matrice carrée A est dite *symétrique* si : ${}^tA = A$.
La matrice carrée A est dite *antisymétrique* si : ${}^tA = -A$.

Trace d'une matrice

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle *trace* de A le réel noté $\mathrm{Tr}(A)$ égal à la somme des éléments diagonaux de A. On a donc :

$$\boxed{\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}}$$

Linéarité de la trace

La trace est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Trace d'un produit

Pour toutes matrices M et N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\mathrm{Tr}(M\,N) = \mathrm{Tr}(N\,M)$$

Polynôme matriciel

A désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si Q est un polynôme de $\mathbb{R}[x]$ tel que $Q(x) = \sum_{k=0}^{r} a_k x^k$, alors $Q(A)$ est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\boxed{Q(A) = \sum_{k=0}^{r} a_k A^k = a_0 I + a_1 A + \ldots + a_r A^r}$$

Soit Q et R deux polynômes de $\mathbb{R}[x]$, α et β deux réels. On a :

$$\boxed{(\alpha Q + \beta R)(A) = \alpha Q(A) + \beta R(A) \text{ et } (QR)(A) = Q(A)R(A)}$$

Polynôme annulateur d'une matrice

A désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On dit que le polynôme Q est *annulateur* de A si $Q(A)=0$.

Toute matrice carrée admet au moins un polynôme annulateur non nul.

Matrices carrées inversibles

On dit qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *inversible* s'il existe une matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB=I$ ou $BA=I$.

La matrice B est l'inverse de A et on note $B=A^{-1}$.

Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB=I$, alors A et B sont inversibles et on a : $A^{-1}=B$ et $B^{-1}=A$.

Si A est inversible, alors A^{-1} est inversible et : $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$.

Inverse d'un produit

Si A et B sont inversibles alors AB est inversible et on a :

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

Si A est inversible, alors, pour tout entier naturel p, A^p est inversible et :

$$\left(A^p\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^p \text{, matrice que l'on note } A^{-p}$$

Inverse d'une transposée

Si A est inversible, alors ${}^tA$ est inversible et on a :

$$\left({}^tA\right)^{-1}={}^t\left(A^{-1}\right)$$

Polynôme annulateur et inversibilité

Si le polynôme Q , défini par $Q(x)=a_0+a_1\,x+...+a_r\,x^r$, est un polynôme annulateur d'une matrice carrée A et si $a_0\neq 0$, il faut savoir démontrer que A est inversible et que :

$$\boxed{A^{-1}=-\frac{1}{a_0}\left(a_1 I+a_2\,A+...+a_r A^{r-1}\right)}$$

Caractérisation de la non inversibilité

Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les vecteurs colonnes forment une famille liée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est non inversible. C'est en particulier le cas pour toute matrice ayant une colonne nulle ou deux colonnes proportionnelles.

Inversibilité des matrices triangulaires

Une matrice *triangulaire* est inversible si, et seulement si, ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.

Inversibilité des matrices diagonales

Une matrice diagonale D est inversible lorsque tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. La matrice D^{-1} est alors obtenue en inversant les coefficients diagonaux de D.

Inversibilité des matrices carrées d'ordre 2

Soit A la matrice définie par : $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

On appelle *déterminant* de A la quantité $\det(A)=ad-bc$.

La matrice A est inversible si, et seulement si : $\det(A)\neq 0$.

Dans ce cas, on a :

$$\boxed{A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

Matrices et systèmes linéaires

Le système linéaire (S) $\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \ldots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$ s'écrit $AX = B$,

en posant $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,p} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

La i^{e} équation du système est notée (L_i) et est appelée i^{e} ligne du système (S).

La matrice A est appelée matrice associée au système (S).

Système échelonné

Un système linéaire de n équations à p inconnues est *échelonné* si les coefficients $a_{i,j}$ de la matrice A vérifient : $\forall i > j$, $a_{i,j} = 0$.

Système triangulaire

Si $n = p$, un système échelonné est dit triangulaire et les coefficients $a_{i,i}$ sont appelés pivots.

Système de Cramer et inversibilité

Soit (S) un système linéaire de n équations à n inconnues. Le système (S) est de Cramer s'il admet un unique n-uplet solution.

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La matrice A est inversible si et seulement si A est la matrice d'un système de Cramer.

La matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si, pour toute matrice X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a : $AX = 0 \Leftrightarrow X = 0$.

Opérations élémentaires

Les opérations suivantes sur les lignes d'un système ou d'une matrice sont appelées *opérations élémentaires* (on suppose $i \neq j$) :
$L_i \leftrightarrow L_j$, $L_i \leftarrow aL_i$ avec $a \neq 0$ et $L_i \leftarrow L_i + bL_j$.

Méthode du pivot de Gauss

Tout système linéaire (S) peut être transformé, à l'aide d'opérations élémentaires, en un système échelonné (S').

Dans le cas où (S) est un système à n équations et n inconnues, (S) est un système de Cramer si et seulement si (S') possède n pivots non nuls.

Réduite de Gauss

Soit A une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle *réduite de Gauss* de A, toute matrice triangulaire obtenue par des opérations élémentaires effectuées sur les lignes de A.

Soit A une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si une réduite de Gauss de A est inversible, alors A est inversible.
Si A est inversible, alors toutes ses réduites sont inversibles.

Méthode de Gauss Jordan

Toute matrice inversible peut se transformer en la matrice identité à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes de cette matrice, et son inverse s'obtient en effectuant, dans le même ordre, les mêmes opérations élémentaires sur les lignes de la matrice identité.

24. ESPACES VECTORIELS

Définition

On appelle *espace vectoriel* tout ensemble E non vide (dont les éléments sont appelés *vecteurs*), muni d'une loi de composition interne, notée +, et d'une loi de composition externe, notée $\cdot$, qui vérifient :

- $\forall (x,y) \in E^2$, $x+y=y+x$ (+ est *commutative*).
- $\forall (x,y,z) \in E^3$, $x+(y+z)=(x+y)+z$ (+ est *associative*).
- Il existe un unique élément de E noté 0_E tel que :
$\forall x \in E$, $x+0_E=0_E+x=x$.
- Pour tout élément x de E, il existe un unique élément y de E qui vérifie : $x+y=y+x=0_E$ (y est appelé *opposé de* x et noté $-x$).
- $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, $\forall x \in E$, $(\lambda\mu)\cdot x=\lambda\cdot(\mu\cdot x)$.
- $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, $\forall x \in E$, $(\lambda+\mu)\cdot x=\lambda\cdot x+\mu\cdot x$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (x,y) \in E^2$, $\lambda\cdot(x+y)=\lambda\cdot x+\lambda\cdot y$.
- $\forall x \in E$, $1\cdot x=x$.

Dans la suite, la lettre E désigne un espace vectoriel.

Le vecteur nul

Soit E un espace vectoriel. Pour tout réel λ et pour tout vecteur x de E, on a :

$$\boxed{\lambda x=0_E \iff \lambda=0 \text{ ou } x=0_E}$$

Sous-espaces vectoriels (ou sous-espaces)

F est un *sous-espace vectoriel* (ou *sous-espace*) de E si, et seulement si :

$$\boxed{\begin{array}{c} F \text{ est une partie non vide de } E \\ \forall (x,y) \in F^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda x+y \in F \end{array}}$$

Tout sous-espace vectoriel de E est lui-même un espace vectoriel.

Intersection

L'intersection de deux sous-espaces de E est un sous-espace de E.

Combinaisons linéaires

Soit $\mathcal{F}=\left(e_1,\ldots,e_p\right)$, où $p\in\mathbb{N}^*$, une famille de p vecteurs de E. On dit qu'un vecteur x de E est *combinaison linéaire* des p vecteurs de $\mathcal{F}$ s'il existe p réels $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ tels que : $x=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i e_i$.

Sous-espace vectoriel engendré

Soit $\mathcal{F}=\left(e_1,\ldots,e_p\right)$ une famille de vecteurs de E.

L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de vecteurs de $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de E appelé *sous-espace vectoriel engendré* par $\mathcal{F}$. Il est noté Vect $\left(e_1,\ldots,e_p\right)$.

Deux propriétés pratiques

Si e_{p+1} est combinaison linéaire des vecteurs $e_1,\ldots,e_p$, on a :

$$\boxed{\operatorname{Vect}\left(e_1,\ldots,e_{p+1}\right)=\operatorname{Vect}\left(e_1,\ldots,e_p\right)}$$

Si les scalaires $\alpha_1,\ldots,\alpha_p$ sont tous non nuls, on a :

$$\boxed{\operatorname{Vect}\left(\alpha_1 e_1,\ldots,\alpha_p e_p\right)=\operatorname{Vect}\left(e_1,\ldots,e_p\right)}$$

Familles génératrices

Soit $\mathcal{F}=\left(e_1,\ldots,e_p\right)$ une famille de p vecteurs de E.

On dit que $\mathcal{F}$ est une *famille génératrice* de E si tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{F}$.

Familles libres

Soit $\mathcal{F}=\left(e_1,\ldots,e_p\right)$ une famille de p vecteurs de E.

On dit que $\mathcal{F}$ est une *famille libre*, ou que les vecteurs $e_1,\ldots,e_p$ sont *linéairement indépendants*, si, pour tout $\left(\lambda_1,\ldots,\lambda_p\right)\in\mathbb{R}^p$:

$$\sum_{i=1}^{p}\lambda_i e_i=0 \;\Rightarrow\; \forall i\in[\![1,p]\!],\ \lambda_i=0$$

Soit x un vecteur de E.

La famille (x) est libre si, et seulement si, x est différent de 0_E .

Soit x et y deux vecteurs de E.

La famille (x,y) est libre si, et seulement si, x et y ne sont pas proportionnels.

Toute famille contenue dans une famille libre est libre.

Toute famille de polynômes non nuls, de degrés deux à deux distincts, est libre.

Si L est une famille libre de E et si G est une famille génératrice de E, alors le cardinal de L est inférieur ou égal au cardinal de G.

Familles liées

Une *famille liée* est une famille qui n'est pas libre.

Une famille de vecteurs de E est liée si et seulement si l'un des vecteurs de cette famille est combinaison linéaire des autres.

Toute famille contenant le vecteur nul est liée.
Toute famille de vecteurs de E qui contient une famille liée est liée.

Bases

Soit $\mathcal{B}=(e_1,\ldots,e_n)$ une famille de n vecteurs de E. On dit que $\mathcal{B}$ est une *base de E* si $\mathcal{B}$ est à la fois libre et génératrice de E.

La famille $\mathcal{B}=(e_1,\ldots,e_n)$ est une base de E si, et seulement si, pour tout vecteur x de E, il existe un unique n-uplet $(x_1,\ldots,x_n)$ de réels tel que : $x=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

Les réels $x_1,\ldots,x_n$ sont les *coordonnées* de x dans la base $\mathcal{B}$.

Dimension

L'espace vectoriel E est dit de *dimension finie* s'il possède une famille génératrice ayant un nombre fini de vecteurs.

Tout espace vectoriel de dimension finie, **non réduit au seul vecteur nul**, admet une base.

Si E possède une base formée de n vecteurs de E (où $n\in\mathbb{N}^*$), alors toutes les bases de E sont formées de n vecteurs.
On dit alors que E est de dimension n et on note : $\dim E=n$.

Si l'espace E est réduit au seul vecteur 0_E, on pose : $\dim E=0$.

Soit E un espace vectoriel de dimension n ($n\in\mathbb{N}^*$).
Toute famille libre de E possède au plus n vecteurs et toute famille libre de n vecteurs de E est une base de E.

Soit E un espace vectoriel de dimension n ($n\in\mathbb{N}^*$).
Toute famille génératrice de E possède au moins n vecteurs et toute famille génératrice de n vecteurs de E est une base de E.

Théorème de la base incomplète

Soit E un espace vectoriel de dimension n ($n \geq 2$). Toute famille libre $\left(e_1, \ldots, e_p\right)$ de p vecteurs de E $\left(1 \leq p < n\right)$ peut être complétée par $n-p$ vecteurs $e_{p+1}, \ldots, e_n$ de E, de telle sorte que la famille $\left(e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n\right)$ soit une base de E.

Matrice d'une famille de vecteurs

Soit E un espace vectoriel de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$) de base $\mathcal{B} = \left(e_1, \ldots, e_n\right)$.

Soit $\mathcal{F} = \left(f_1, \ldots, f_p\right)$ une famille de p vecteurs de E ($p \in \mathbb{N}^*$).

On appelle matrice de la famille $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$, la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont les coefficients de la j^{e} colonne sont les coordonnées de f_j dans la base $\mathcal{B}$.

Matrice de passage

Soit E un espace vectoriel de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$) de base $\mathcal{B} = \left(e_1, \ldots, e_n\right)$ et $\mathcal{F} = \left(f_1, \ldots, f_n\right)$ une famille de n vecteurs de E.

La famille $\mathcal{F}$ est une base de E si, et seulement si, la matrice P de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$ est inversible.

Dans ce cas, P est appelée *matrice de passage* de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{F}$.

Rang d'une famille de vecteurs

Soit E un espace vectoriel et $\left(e_1, \ldots, e_n\right)$ une famille de vecteurs de E. On appelle *rang de la famille* $\left(e_1, \ldots, e_n\right)$, et on note $\operatorname{rg}\left(e_1, \ldots, e_n\right)$, la dimension de $\operatorname{Vect}\left(e_1, \ldots, e_n\right)$.

Le rang de $\left(e_1, \ldots, e_n\right)$ est égal au cardinal de la plus grande famille libre contenue dans $\left(e_1, \ldots, e_n\right)$.

Rang et base

Soit E un espace vectoriel de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$).
La famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E si, et seulement si :

$$\text{rg}\,(e_1, \ldots, e_n) = n$$

Dimension et sous-espaces vectoriels

Si E est un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$, tout sous-espace vectoriel F de E vérifie : $\dim F \leq \dim E$.

Si $\dim F = 1$, F est appelé *droite*.
Si $\dim F = 2$, F est appelé *plan*.
Si $\dim F = n-1$, F est appelé *hyperplan*.

Théorème du sous-espace

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Si F est un sous-espace vectoriel de E tel que $\dim F = \dim E$, alors $F = E$.

Espaces vectoriels de référence

$\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel de dimension *n*.

Pour tout i de $[\![1,n]\!]$, on note $e_i = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ (le nombre 1 se trouve en i^{e} position). La famille $(e_1,\ldots,e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, appelée *base canonique* de $\mathbb{R}^n$.

En particulier, $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel de dimension 1 et, grâce à une considération de dimension, ses seuls sous-espaces vectoriels sont $\{0\}$ et $\mathbb{R}$ lui-même.

$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension *np*.

Pour tout couple (i,j) de $[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé sur la i^{e} ligne et la j^{e} colonne qui vaut 1.

La famille $\left(E_{i,j}\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, appelée *base canonique* de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathcal{A}(A, \mathbb{R})$ des applications de A dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel qui n'est pas de dimension finie.

L'ensemble $\mathcal{A}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ des suites réelles est un espace vectoriel qui n'est pas de dimension finie.

$\mathbb{R}[x]$ est un espace vectoriel qui n'est pas de dimension finie.

$\mathbb{R}_n[x]$ est un espace vectoriel de dimension $n+1$.

La famille $\mathcal{B}=(e_0, e_1, \ldots, e_n)$, où e_k est défini par $e_k(x)=x^k$ (et en particulier $e_0(x)=1$), est une base de $\mathbb{R}_n[x]$, appelée *base canonique* de $\mathbb{R}_n[x]$.

&

Il est difficile de faire la différence entre un mathématicien qui dort et un mathématicien qui travaille.

André Lichnerowicz

25. APPLICATIONS LINÉAIRES

E, F, G sont des espaces vectoriels.

Définitions

Une *application linéaire* f de E dans F est une application vérifiant

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$$

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est un espace vectoriel, noté $\mathcal{L}(E,F)$.

On appelle *forme linéaire* sur E, toute application linéaire de E dans $\mathbb{R}$. L'espace des formes linéaires sur E est noté $\mathcal{L}(E,\mathbb{R})$.

On appelle *endomorphisme* de E, toute application linéaire de E dans E. L'espace des endomorphismes de E est noté $\mathcal{L}(E)$.

On appelle *isomorphisme* de E dans F, toute application linéaire bijective de E dans F.

Image d'une combinaison linéaire

Soit f une application linéaire de E dans F. Quels que soient les vecteurs $x_1, \dots, x_p$ de E et les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, on a :

$$f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i)$$

Égalité de deux applications linéaires

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, dont $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base, et soit f et g deux applications linéaires de E dans F.

$$f = g \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ f(e_i) = g(e_i)$$

Composition des applications linéaires

Si f est une application linéaire de E dans F et si g est une application linéaire de F dans G, alors :

$$g \circ f \text{ est une application linéaire de } E \text{ dans } G$$

En particulier, la composée de deux endomorphismes de E est un endomorphisme de E.

Isomorphismes et composition

Si f est un isomorphisme de E dans E, alors f^{-1} est un isomorphisme de E dans E.

La composée de deux isomorphismes f et g de E dans E est un isomorphisme de E dans E, et on a :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Formule du binôme de Newton

Soit f un endomorphisme de E. Par convention, on pose $f^0 = Id_E$ et, pour tout entier naturel p non nul, on pose $f^p = f^{p-1} \circ f$.

Soit f et g deux endomorphismes de E qui commutent (c'est-à-dire tels que $f \circ g = g \circ f$). Alors pour tout entier naturel p, on a :

$$(f+g)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} f^k \circ g^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} f^{p-k} \circ g^k$$

Polynôme d'endomorphisme

Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E.

Si Q est un polynôme de $\mathbb{R}[x]$ défini par $Q(x) = \sum_{k=0}^{r} a_k x^k$, alors $Q(f)$ est l'endomorphisme de E défini par :

$$Q(f) = \sum_{k=0}^{r} a_k f^k = a_0\, Id_E + a_1 f + \ldots + a_r f^r$$

Soit Q et R deux polynômes de $\mathbb{R}[x]$, α et β deux réels. On a :

$$(\alpha Q+\beta R)(f)=\alpha Q(f)+\beta R(f) \text{ et } (QR)(f)=Q(f)\circ R(f)$$

Polynôme annulateur d'un endomorphisme

Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E.
On dit que le polynôme Q est *annulateur* de f si : $Q(f)=0$.

Si E est de dimension **finie**, tout endomorphisme de E admet au moins un polynôme annulateur non nul.

Polynôme annulateur et isomorphisme

Si le polynôme Q, défini par $Q(x)=a_0+a_1 x+\ldots+a_r x^r$, est un polynôme annulateur d'un endomorphisme f et si $a_0 \neq 0$, il faut savoir démontrer que f est bijectif et que :

$$f^{-1}=-\frac{1}{a_0}\left(a_1 Id+a_2 f+\ldots+a_r f^{r-1}\right)$$

Noyau

Soit f une application linéaire de E dans F. On appelle *noyau* de f, noté $\operatorname{Ker}(f)$, le sous-ensemble de E défini par :

$$\operatorname{Ker}(f)=\{x\in E,\ f(x)=0_F\}$$

$\operatorname{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E

Noyau et injectivité

L'application f est injective si, et seulement si : $\operatorname{Ker}(f)=\{0_E\}$

Image

Soit f une application linéaire de E dans F. On appelle *image* de f, notée $\mathrm{Im}(f)$, le sous-ensemble de F défini par :

$$\boxed{\mathrm{Im}(f)=\{y\in F, \exists x\in E, y=f(x)\}}$$

$\boxed{\mathrm{Im}(f) \text{ est un sous-espace vectoriel de } F}$

Image et surjectivité

$\boxed{\text{L'application } f \text{ est surjective si, et seulement si : } \mathrm{Im}(f)=F\ .}$

Sous-espace stable

Cette notion n'est pas explicitement au programme mais elle intervient dans les énoncés de concours où la définition devra être rappelée.

On désigne par f un endomorphisme de E.

On dit qu'un sous-espace F de E est *stable* par f si $f(F)\subset F$.

Autrement dit :

$$\boxed{F \text{ est stable par } f \text{ si : } \forall x\in F\ ,\ f(x)\in F}$$

&

Les mathématiques ne sont écrites
que pour les mathématiciens.
Nicolas Copernic

26. APPLICATIONS LINÉAIRES EN DIMENSION FINIE

Espaces isomorphes

Deux espaces vectoriels E et F de dimension finie sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme de E dans F.

Tout espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{R}^n$.

Espaces isomorphes et dimension

Soit deux espaces vectoriels E et F de **dimension finie**.

E et F sont isomorphes si, et seulement si : $\dim E = \dim F$.

Isomorphismes et bases

Si f est un isomorphisme de E dans F, alors l'image par f d'une base de E est une base de F.
Réciproquement, si l'image d'une base de E par une application linéaire f est une base de F, alors f est un isomorphisme de E dans F.

Famille génératrice de l'image

Soit f une application linéaire de E dans F et $\mathcal{B} = \left(e_1, \ldots, e_p\right)$ une base de E. On a :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,\left(f\left(e_1\right), \ldots, f\left(e_p\right)\right)$$

Rang d'une application linéaire

Soit f une application linéaire de E dans F. Si $\mathrm{Im}\, f$ est de dimension finie, on appelle *rang* de f, le nombre défini par :

$$\mathrm{rg}(f) = \dim \mathrm{Im}(f)$$

Rang et application nulle

Soit f une application linéaire de E dans F. On a :

$$\boxed{\operatorname{rg}(f)=0 \Leftrightarrow f=0}$$

Rang et bijection

Soit f une application linéaire de E dans F, où E et F sont deux espaces vectoriels de **même dimension *n***.

$$\boxed{f \text{ est bijective si, et seulement si : } \operatorname{rg}(f)=n.}$$

En particulier, si f est un endomorphisme de E, où E est un espace vectoriel de **dimension finie**, alors f est un isomorphisme si, et seulement si : $\operatorname{rg}(f)=\dim E$.

Théorème du rang

Soit f une application linéaire de E dans F, où E est un espace vectoriel de dimension finie. On a :

$$\boxed{\dim E = rg(f)+\dim \operatorname{Ker}(f)}$$

Caractérisation d'un isomorphisme

Soit f une application linéaire de E dans F, où E et F sont deux espaces vectoriels de **même dimension *finie***. On a :

$$\boxed{f \text{ injective } \Leftrightarrow f \text{ surjective } \Leftrightarrow f \text{ bijective}}$$

Caractérisation d'un endomorphisme bijectif

Soit f un endomorphisme de E, où E un espace vectoriel de **dimension finie**.

$$\boxed{f \text{ injectif } \Leftrightarrow f \text{ surjectif } \Leftrightarrow f \text{ bijectif}}$$

Hyperplan et forme linéaire

Soit E un espace de **dimension finie** et H un sous-espace de E.

> H est un hyperplan de E si et seulement si H est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

27. APPLICATIONS LINÉAIRES ET MATRICES

Matrice d'une application linéaire

Soit E un espace vectoriel de dimension p, de base $\mathcal{B} = \left(e_1, \ldots, e_p\right)$, et F un espace vectoriel de dimension n, de base $\mathcal{B}' = \left(e'_1, \ldots, e'_n\right)$.
Si f est une application linéaire de E dans F, on appelle matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, souvent notée $\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$, dont la j e colonne est formée des coordonnées du vecteur $f\left(e_j\right)$ dans la base $\mathcal{B}'$.

La matrice d'une forme linéaire est une matrice ligne.

Matrice d'un endomorphisme

Soit E un espace vectoriel de dimension p, de base $\mathcal{B} = \left(e_1, \ldots, e_p\right)$.
Si f est un endomorphisme de E, on appelle matrice de f dans la base $\mathcal{B}$, la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, notée $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)$, dont la $j^{\text{ème}}$ colonne est formée des coordonnées du vecteur $f\left(e_j\right)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Soit E un espace vectoriel de **dimension *p***. Quelle que soit la base $\mathcal{B}$ de E, on a :

$$\boxed{\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\left(Id_E\right) = I_p}$$

Isomorphisme canonique

Soit E un espace vectoriel de dimension p, de base $\mathcal{B}$, et F un espace vectoriel de dimension n, de base $\mathcal{B}'$. L'application qui à tout f de $\mathcal{L}(E,F)$ associe la matrice $\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. On a donc :

$$\boxed{\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) = np = \dim E \times \dim F}$$

Application linéaire canoniquement associée

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ désignent les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$, l'application linéaire f de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que $\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)=A$ est appelée application linéaire canoniquement associée à A.
Elle est définie pour tout $(x_1,\dots,x_p)$ de $\mathbb{R}^p$ par :

$$f((x_1,\dots,x_p))=(y_1,\dots,y_n)\text{, où } \forall i\in[\![1,n]\!],\ y_i=\sum_{k=1}^{p}a_{i,k}x_k$$

Opérations sur les matrices

Soit E un espace vectoriel de base $\mathcal{B}$ et F un espace vectoriel de base $\mathcal{B}'$. Pour toutes applications linéaires f et g de E dans F et pour tout réel λ, on a :

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f+g)=\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)+\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g)$$

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\lambda f)=\lambda\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$$

Soit E, F et G trois espaces vectoriels de bases respectives $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$. Si f est une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G, alors :

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_3}(g\circ f)=\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3}(g)\,\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f)$$

Soit E un espace vectoriel de base $\mathcal{B}$. Si f est un endomorphisme de E, alors :

$$\forall k\in\mathbb{N},\ \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f^k)=\left(\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)\right)^k$$

Inversibilité et bijection

Soit E et F deux espaces vectoriels de **même dimension**, de bases respectives $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, f une application linéaire de E dans F.

f est bijective si, et seulement si, $\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ est inversible.

Lorsque f est bijective, on a :

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f^{-1})=\left(\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)\right)^{-1}$$

Image d'un vecteur par une application linéaire

Soit E un espace vectoriel de dimension p, muni d'une base $\mathcal{B}$ et F un espace vectoriel de dimension n, muni d'une base $\mathcal{B}'$. Soit f une application linéaire de E dans F et $A = \text{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$. Soit x un vecteur de E et y un vecteur de F. On note X (resp. Y) la matrice-colonne de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) formée des coordonnées de x (resp. y) dans la base $\mathcal{B}$ (resp. dans la base $\mathcal{B}'$). On a :

$$\boxed{y = f(x) \iff Y = AX}$$

En particulier, on a :

$$\boxed{x \in \text{Ker}(f) \iff AX = 0}$$

Rang d'une famille de vecteurs (rappel)

Soit E un espace vectoriel et $(e_1,\ldots,e_n)$ une famille de vecteurs de E. On appelle *rang* de la famille $(e_1,\ldots,e_n)$, le nombre défini par :

$$\boxed{\text{rg}(e_1,\ldots,e_n) = \dim \text{Vect}(e_1,\ldots,e_n)}$$

Rang d'une matrice

Le *rang* d'une matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est le rang de la famille de ses vecteurs colonnes dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On le note $\text{rg}(A)$.

Une matrice et sa transposée ont même rang

$$\boxed{\text{rg}(A) = 0 \iff A = 0}$$

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

A est inversible si, et seulement si : $\text{rg}(A) = n$.

Soit f une application linéaire de E dans F, où E et F sont deux espaces vectoriels de bases respectives $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Si A est la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. On a :

$$\boxed{\text{rg}(f) = \text{rg}(A)}$$

28. SOMMES, SOMMES DIRECTES, SOUS-ESPACES SUPPLÉMENTAIRES

La lettre E désigne un espace vectoriel.

Somme de deux sous-espaces

Soit F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E.

On appelle *somme* de F_1 et F_2 l'ensemble, noté $F_1 + F_2$, défini par :

$$\boxed{F_1 + F_2 = \left\{ x_1 + x_2,\ (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2 \right\}}$$

La somme de deux sous-espaces de E est un sous-espace de E.

Formule de Grassmann

Si E est un espace vectoriel de dimension finie et si F_1 et F_2 sont deux sous-espaces de E, on a :

$$\boxed{\dim(F_1 + F_2) = \dim F_1 + \dim F_2 - \dim(F_1 \cap F_2)}$$

Somme directe de deux sous-espaces

Soit F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E.

On dit que la somme $F_1 + F_2$ est *directe* si :

$$\boxed{F_1 \cap F_2 = \{0_E\}}$$

Lorsque la somme $F_1 + F_2$ est directe, elle est notée $F_1 \oplus F_2$.

Somme de r sous-espaces

La lettre r désigne un entier supérieur ou égal à 2 et F_1, F_2, ..., F_r sont des sous-espaces vectoriels de E.

On appelle somme de F_1, F_2, ..., F_r, l'ensemble noté $F_1 + ... + F_r$ ou $\sum_{i=1}^{r} F_i$, et défini par :

$$F_1 + F_2 + ... + F_r = \left\{ x_1 + x_2 + ... + x_r, \left(x_1, x_2, ..., x_r \right) \in F_1 \times F_2 \times ... \times F_r \right\}$$

La somme de r sous-espaces de E est un sous-espace de E.

Somme directe de r sous-espaces

La lettre r désigne un entier supérieur ou égal à 2 et F_1, F_2, ..., F_r sont des sous-espaces vectoriels de E.

On dit que la somme $F = \sum_{i=1}^{r} F_i$ est directe si pour tout vecteur x de F, il existe un *unique* r-uplet $\left(x_1, x_2, ..., x_r \right)$ de $F_1 \times F_2 \times ... \times F_r$ tel que : $x = x_1 + x_2 + ... + x_r$.

Dans ce cas, on note $F = F_1 \oplus F_2 \oplus \ldots \oplus F_r$ ou $F = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$.

La somme $F_1 + F_2 + ... + F_r$ est directe si, et seulement si, pour tout r-uplet $\left(x_1, ..., x_r \right)$ de $F_1 \times ... \times F_r$, on a :

$$x_1 + x_2 + ... + x_r = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![1, r]\!], \ x_i = 0$$

On suppose que F_1, ..., F_r sont des sous-espaces de dimension finie, de bases respectives $\mathcal{B}_1$, ..., $\mathcal{B}_r$.

La somme $F = F_1 + F_2 + ... + F_r$ est directe si, et seulement si :

$$\dim F = \sum_{i=1}^{r} \dim F_i$$

La somme $F = F_1 + F_2 + ... + F_r$ est directe si, et seulement si, la famille obtenue par concaténation (on dit aussi juxtaposition) des bases $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, ..., $\mathcal{B}_r$ est une base de F.

Sous-espaces supplémentaires

Soit F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E.

On dit que F_1 et F_2 sont *supplémentaires* dans E (ou que E est somme directe de F_1 et F_2) si :

$$\boxed{E = F_1 \oplus F_2}$$

F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E si, et seulement si, pour tout vecteur x de E, il existe un unique couple (x_1, x_2) de $F_1 \times F_2$ tel que $x = x_1 + x_2$.

F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E si, et seulement si :

$$F_1 \cap F_2 = \{0_E\} \text{ et } \dim F_1 + \dim F_2 = \dim E$$

La lettre r désigne un entier supérieur ou égal à 2 et F_1, F_2, ..., F_r sont des sous-espaces vectoriels de E.

$E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$ si, et seulement si, les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

- $E = \sum_{i=1}^{r} F_i$, c'est-à-dire que pour tout vecteur x de E, il existe un r-uplet $(x_1, x_2, ..., x_r)$ de $F_1 \times F_2 \times ... \times F_r$ tel que : $x = x_1 + x_2 + ... + x_r$.
- La somme $F_1 + F_2 + ... + F_r$ est directe.

29. PROJECTEURS

La lettre E désigne un espace vectoriel.

Définitions

Soit F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E. Pour tout vecteur x de E, on note (x_1, x_2) l'unique couple de $F_1 \times F_2$ tel que : $x = x_1 + x_2$.

On appelle *projecteur* de E sur F_1, parallèlement à F_2 (ou de direction F_2), l'application p qui, à tout vecteur x de E, associe $p(x) = x_1$. Le vecteur $p(x)$ est appelé le *projeté* de x.

Projecteurs, image et noyau

Tout projecteur de E est un endomorphisme de E.

Soit p le projecteur sur F_1, parallèlement à F_2. On a :

$$F_1 = \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(Id_E - p) \text{ et } F_2 = \mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}(Id_E - p)$$

$$E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$$

Remarque. L'égalité $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - Id_E)$ signifie que $\mathrm{Im}(p)$ est l'ensemble des vecteurs x de E tels que $p(x) = x$.

Projecteurs associés

Soit F_1 et F_2 deux sous-espaces supplémentaires dans E.

Le projecteur p sur F_1, parallèlement à F_2 et le projecteur q sur F_2, parallèlement à F_1 sont appelés *projecteurs associés*.

Soit p et q deux projecteurs de E. Les projecteurs p et q sont associés si, et seulement si : $p + q = Id_E$.

Caractérisation du projeté

Soit p le projecteur sur F_1, parallèlement à F_2. Pour tout vecteur x de E, on a :

$$y = p(x) \text{ si, et seulement si : } y \in F_1 \text{ et } x - y \in F_2.$$

Caractérisation des projecteurs

L'endomorphisme f de E est un projecteur de E si, et seulement si :

$$f \circ f = f$$

Plus précisément :

- Si l'endomorphisme f de E est un projecteur, alors : $f \circ f = f$.
- Si f est un endomorphisme de E tel que $f \circ f = f$, alors f est le projecteur sur $\operatorname{Im}(f)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(f)$.

Caractérisation matricielle des projecteurs

On suppose que l'espace E est de dimension finie. On note $\mathcal{B}$ une base de E et f un endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A.

f est un projecteur de E si, et seulement si : $A^2 = A$.

&

L'étude des mathématiques est comme le Nil,
qui commence en modestie et finit en magnificence.

Charles Caleb Colton

30. CHANGEMENT DE BASE

Matrice de passage

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E (de dimension finie). On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, la matrice de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.

Si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, alors P est inversible et P^{-1} est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

Changement de base et coordonnées

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Si, pour tout vecteur x de E, on note X la matrice de x dans la base $\mathcal{B}$ et X' la matrice de x dans la base $\mathcal{B}'$, alors on a :

$$\boxed{X = PX'}$$

Formules de changement de base

Si, pour tout endomorphisme f de E, on note A la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ et A' la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$, alors on a :

$$\boxed{A' = P^{-1}AP}$$

Matrices semblables

Deux matrices A et A' de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont dites *semblables* s'il existe une matrice P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que :

$$\boxed{A' = P^{-1}AP}$$

Deux matrices sont semblables si elles sont les matrices d'un même endomorphisme de E, dans des bases différentes.

Matrices semblables et trace

Deux matrices semblables ont même trace.

31. RÉDUCTION DES MATRICES CARRÉES

A désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Valeurs propres d'une matrice

Le réel λ est une *valeur propre* de A s'il existe un vecteur colonne X **non nul** de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que : $AX = \lambda X$.
L'ensemble des valeurs propres de A est appelé *spectre* de A, on le note $\mathrm{Sp}(A)$.

Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ possède au plus n valeurs propres.

Le réel λ est valeur propre de A si, et seulement si, la matrice $A - \lambda I$ n'est pas inversible.

Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux.

Valeurs propres et inversibilité

0 est valeur propre de A si, et seulement si, A n'est pas inversible.

A est inversible si, et seulement si, 0 n'est pas valeur propre de A.

Vecteurs propres d'une matrice

Si λ est une valeur propre de A, tout vecteur colonne X **non nul** de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = \lambda X$ est appelé *vecteur propre* de A associé à la valeur propre λ.
L'ensemble $E_\lambda(A)$ de tous les vecteurs X tels que $AX = \lambda X$ (y compris le vecteur nul) est un sous-espace de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, appelé *sous-espace propre* de A associé à la valeur propre λ.
On a :

$$\boxed{E_\lambda(A) = \left\{ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), (A - \lambda I) X = 0 \right\}}$$

Vecteurs propres et polynôme matriciel

A désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si Q est un polynôme et si X est un vecteur propre de la matrice A, associé à la valeur propre λ, alors X est vecteur propre de la matrice $Q(A)$, associé à la valeur propre $Q(\lambda)$.

Polynôme annulateur et valeurs propres

Si Q est un polynôme non nul annulateur de A, alors les valeurs propres de A sont parmi les racines de Q.

Matrices diagonalisables

La matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *diagonalisable* s'il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que :

$$\boxed{A = PDP^{-1}}$$

En d'autres termes :

A est diagonalisable si A est semblable à une matrice diagonale.

Conditions suffisantes de diagonalisabilité

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si A possède exactement n valeurs propres distinctes 2 à 2, alors A est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont de dimension 1.

Toute matrice symétrique est diagonalisable.

Critères de diagonalisabilité d'une matrice

On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ $(p \leq n)$ les valeurs propres d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et on désigne par $E_{\lambda_1}(A), \ldots, E_{\lambda_p}(A)$ les sous-espaces propres de A respectivement associés à ces valeurs propres.

A est diagonalisable si, et seulement si : $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \overset{p}{\underset{i=1}{\oplus}} E_{\lambda_i}(A)$.

A est diagonalisable si, et seulement si : $\sum_{i=1}^{p} \dim E_{\lambda_i}(A) = n$.

A est diagonalisable si, et seulement si, il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A.

Si l'on désigne par $(E_1, \ldots, E_n)$ une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A associés respectivement aux valeurs propres λ_1, ..., λ_n (non forcément distinctes), alors on a $A = PDP^{-1}$, où les colonnes de P sont $E_1, \ldots, E_n$ et où D est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont λ_1, ..., λ_n .

&

On se souviendra d'Archimède quand on aura oublié Eschyle, parce que les langues meurent, mais pas les idées mathématiques.

Godfrey Hardy

32. RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES

E est un espace vectoriel et f est un endomorphisme de E.

Valeurs propres d'un endomorphisme

Le réel λ est une *valeur propre* de f s'il existe un vecteur x non nul de E tel que $f(x) = \lambda x$.
L'ensemble des valeurs propres de f est appelé *spectre* de f, on le note $\mathrm{Sp}(f)$.

Recherche des valeurs propres

λ est valeur propre de f si, et seulement si, $f - \lambda Id_E$ n'est pas injectif.

0 est valeur propre de l'endomorphisme f si, et seulement si, f n'est pas injectif.

On note $\mathcal{B}$ une base de E et A la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
Le réel λ est valeur propre de f si, et seulement si, λ est valeur propre de A.

Valeurs propres en dimension finie

On suppose que E est un espace vectoriel de **dimension finie *n***.

L'endomorphisme f possède au plus n valeurs propres.

λ est valeur propre de f si, et seulement si, $f - \lambda Id_E$ n'est pas bijectif (synonyme d'injectif car E est ici de dimension finie).

0 est valeur propre de l'endomorphisme f si, et seulement si, f n'est pas bijectif (synonyme de "pas injectif" car E est de dimension finie).

Vecteurs propres d'un endomorphisme

Si λ est une valeur propre de f, tout vecteur x non nul tel que $f(x)=\lambda x$ est appelé *vecteur propre* de f associé à la valeur propre λ.
L'ensemble $E_\lambda(f)$ de tous les vecteurs x tels que $f(x)=\lambda x$ (y compris le vecteur nul), est un sous-espace vectoriel de E, appelé *sous-espace propre* de f associé à la valeur propre λ et on a :

$$\boxed{E_\lambda(f)=\mathrm{Ker}\left(f-\lambda Id_E\right)}$$

Recherche matricielle des vecteurs propres

On note $\mathcal{B}$ une base de E et A la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. Soit un vecteur x de E et X la matrice du vecteur x dans la base $\mathcal{B}$.
x est vecteur propre de f associé à la valeur propre λ si et seulement si X est vecteur propre de A associé à la valeur λ.

Vecteurs propres et liberté

Si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des valeurs propres 2 à 2 distinctes de f et si $x_1, \dots, x_p$ sont des vecteurs propres de f associés respectivement à $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, alors $(x_1, \dots, x_p)$ est libre.

Si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des valeurs propres 2 à 2 distinctes de f et si $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$ sont des bases des sous-espaces propres de f associés à ces valeurs propres, alors la famille obtenue en concaténant les bases $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$ est libre.

Vecteurs propres et polynôme d'endomorphisme

Si Q est un polynôme et si x est un vecteur propre de l'endomorphisme f, associé à la valeur propre λ, alors x est vecteur propre de l'endomorphisme $Q(f)$, associé à la valeur propre $Q(\lambda)$.

Polynôme annulateur et valeurs propres

Si Q est un polynôme non nul, annulateur de f, alors les valeurs propres de f sont parmi les racines de Q.

Endomorphisme diagonalisable

Soit E un espace vectoriel de **dimension finie** et f un endomorphisme de E.

On dit que f est *diagonalisable* s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de f.

Condition suffisante de diagonalisabilité

Soit E un espace vectoriel de **dimension *n*** et f un endomorphisme de E.

Si f possède exactement n valeurs propres 2 à 2 distinctes, alors f est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont de dimension 1.

Critères de diagonalisabilité d'un endomorphisme

On note $\lambda_1, ..., \lambda_p$ $(p \leq n)$ les valeurs propres de f, et on désigne par $E_{\lambda_1}(f), ..., E_{\lambda_p}(f)$ les sous-espaces propres de f respectivement associés à ces valeurs propres.

f est diagonalisable si, et seulement si : $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(f)$.

f est diagonalisable si, et seulement si : $\sum_{i=1}^{p} \dim E_{\lambda_i}(f) = \dim E$.

Diagonalisabilité endomorphisme-matrice

L'endomorphisme f de E est diagonalisable si, et seulement si, il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale.

Soit $\mathcal{B}$ une base de E et A la matrice d'un endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}$.

L'endomorphisme f est diagonalisable si, et seulement si, la matrice A est diagonalisable.

Dans ce cas, si $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ est une base de E formée de vecteurs propres de f respectivement associés aux valeurs propres λ_1, ..., λ_n non nécessairement distinctes, on a $A = PDP^{-1}$, où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et D la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont λ_1, ..., λ_n.

&

Les mathématiques peuvent être définies
comme une science dans laquelle on ne sait jamais
de quoi on parle ni si ce que l'on dit est vrai.

Bertrand Russel

Algèbre bilinéaire

33. PRODUIT SCALAIRE ET NORME

La lettre E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Forme bilinéaire

On appelle *forme bilinéaire* sur E, toute application f de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie :

- $\forall (x_1, x_2, y) \in E^3$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda x_1 + x_2, y) = \lambda f(x_1, y) + f(x_2, y)$.
- $\forall (x, y_1, y_2) \in E^3$, $\forall \mu \in \mathbb{R}$, $f(x, \mu y_1 + y_2) = \mu f(x, y_1) + f(x, y_2)$.

Définitions

On dit que la forme bilinéaire f sur E est *symétrique* si, pour tout couple (x, y) de vecteurs de E, on a : $f(x, y) = f(y, x)$.

On dit que la forme bilinéaire f sur E est *positive* si, pour tout vecteur x de E, on a : $f(x, x) \geq 0$.

On dit que la forme bilinéaire f sur E est *définie* si, pour tout vecteur x de E, on a : $f(x, x) = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$.

Produit scalaire

On appelle *produit scalaire sur E*, toute forme bilinéaire sur E, symétrique, positive et définie.

Lorsque f est un produit scalaire sur E, $f(x, y)$ est noté $\langle x, y \rangle$.

Pour tout couple (x, y) de vecteurs de E, on a :

$$\boxed{\langle x, 0_E \rangle = 0 \text{ et } \langle 0_E, y \rangle = 0}$$

Formule de bilinéarité

Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $\langle\ ,\ \rangle$.

Quels que soient les vecteurs $e_1, \ldots, e_n$, $f_1, \ldots, f_p$ de E et les réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, $\mu_1, \ldots, \mu_p$, on a :

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i , \sum_{j=1}^{p} \mu_j f_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \lambda_i \mu_j \left\langle e_i, f_j \right\rangle$$

Norme euclidienne

E est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $\langle\ ,\ \rangle$.

On appelle *norme euclidienne* associée au produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$, l'application qui, à tout vecteur x de E, associe le réel $\sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Ce réel est appelé norme du vecteur x et on note : $\| x \| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

On dit qu'un vecteur x de E est *normé* ou *unitaire* si : $\| x \| = 1$.

Propriétés

Pour tout vecteur x de E et pour tout réel λ, on a :

- $\| x \| \geq 0$.
- $\| x \| = 0 \iff x = 0$.
- $\| \lambda x \| = |\lambda| \times \| x \|$.

Produit scalaire et norme

Pour tout couple (x, y) de vecteurs de E, on a :

$$\| x + y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2 + 2\langle x, y \rangle$$

De façon équivalente, on a aussi :

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}\left(\| x+y\|^2 - \| x\|^2 - \| y\|^2\right)$$

Il faut savoir montrer que

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\| x+y\|^2 - \| x-y\|^2\right)$$

Inégalité triangulaire

Pour tout couple (x, y) de vecteurs de E, on a :

$$\| x+y\| \leq \| x\| + \| y\|$$

Il faut savoir en déduire que, pour tout couple (x, y) de vecteurs de E, on a :

$$\big|\, \| x\| - \| y\| \,\big| \leq \| x-y\|$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Pour tout couple (x, y) de vecteurs de E, on a :

$$\left|\langle x, y\rangle\right| \leq \| x\| \, \| y\| \quad \text{ou} \quad \langle x, y\rangle^2 \leq \| x\|^2 \, \| y\|^2$$

avec égalité si, et seulement si, la famille (x, y) est liée.

Produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$

Soit deux vecteurs $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, appelé *produit scalaire canonique de* $\mathbb{R}^n$.

$\| x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ est la *norme euclidienne canonique* du vecteur x.

Produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Soit deux vecteurs $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$\langle X, Y \rangle = {}^t XY = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, appelé *produit scalaire canonique de* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$\| x \| = \sqrt{{}^t XX} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ est la *norme euclidienne canonique* du vecteur X.

Inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$

Cette inégalité, appliquée au produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ ou à celui de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, s'écrit :

Quels que soient les réels $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$, on a :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$$

En sciences, ce qui est démontrable ne doit pas être admis sans démonstration

Richard Dedekind

34. ORTHOGONALITÉ

La lettre E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $\langle\ ,\ \rangle$. La norme d'un vecteur x de E est notée $\|x\|$.

Vecteurs orthogonaux

Deux vecteurs x et y de E sont *orthogonaux*, et on note $x \perp y$, si :

$$\boxed{\langle x, y\rangle = 0}$$

Le seul vecteur orthogonal à tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ est le vecteur nul : en effet, si x est un vecteur orthogonal à tout vecteur de $\mathbb{R}^n$, il est en particulier orthogonal à lui-même, ce qui donne $\langle x, x\rangle = 0$, c'est-à-dire $\|x\|^2 = 0$, d'où $\|x\| = 0$, puis $x = 0$.

Théorème de Pythagore

Soit x et y deux vecteurs de E. On a :

$$\boxed{x \perp y \iff \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2}$$

Sous-espaces orthogonaux

On dit que deux sous-espaces vectoriels A et B de E sont *orthogonaux*, et on note $A \perp B$, si :

$$\boxed{\forall (a,b) \in A \times B,\ \langle a, b\rangle = 0}$$

Familles orthogonales

On dit que la famille $(e_1, \ldots, e_p)$ de vecteurs de E est *orthogonale* si :

$$\boxed{\forall (i,j) \in [\![1, p]\!]^2,\ i \neq j \ \Rightarrow\ \langle e_i, e_j\rangle = 0}$$

Toute famille orthogonale de E ne contenant pas le vecteur nul est libre.

Familles orthonormales

On dit que la famille $\left(e_1,...,e_p\right)$ de vecteurs de E est *orthonormale* si elle est *orthogonale* et si :

$$\boxed{\forall i \in [\![1, p]\!],\ \left\| e_i \right\| = 1}$$

Toute famille orthonormale de E est libre.

Procédé d'orthonormalisation de Schmidt

Cette méthode n'est pas exigible mais il est bien de savoir la mettre en œuvre sur des familles de petite taille.

Soit p un entier supérieur ou égal à 2 et $\left(e_1,...,e_p\right)$ une famille libre de vecteurs de E. On note ε_1, ..., ε_p les vecteurs définis de la manière suivante :

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\left\| e_1 \right\|} e_1$$

$$\forall k \in [\![2, p]\!],\ \varepsilon_k = \frac{1}{\left\| e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i \right\|} \left(e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k, \varepsilon_i \rangle\ \varepsilon_i \right).$$

La famille $\left(\varepsilon_1,...,\varepsilon_p\right)$, ainsi construite, est orthonormale.

De plus, pour tout k élément de $[\![1, p]\!]$, on a :

$$\mathrm{Vect}\left(\varepsilon_1,...,\varepsilon_k\right) = \mathrm{Vect}\left(e_1,...,e_k\right)$$

35. ESPACES EUCLIDIENS

E est un espace vectoriel, de dimension finie n, muni d'un produit scalaire noté $\langle \ , \ \rangle$. La norme d'un vecteur x de E est notée $\|x\|$.

Définition

On appelle *espace euclidien*, tout espace vectoriel de dimension finie, muni d'un produit scalaire.

Base orthogonale

On dit qu'une famille $\mathcal{B}$ de vecteurs de E est une *base orthogonale* de E si $\mathcal{B}$ est à la fois une famille orthogonale et une base de E.

Toute famille orthogonale formée de n vecteurs non nuls de E (avec $n = \dim E$), est une base orthogonale de E.

Base orthonormale

On dit qu'une famille $\mathcal{B}$ de vecteurs de E est une *base orthonormale* (ou *orthonormée*) de E si $\mathcal{B}$ est à la fois une famille orthonormale et une base de E.

Toute famille orthonormale formée de n vecteurs de E (avec $n = \dim E$), est une base orthonormale de E.

Exemples fondamentaux

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel euclidien et la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une base orthonormale pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel euclidien et la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est une base orthonormale pour le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Existence de bases orthonormales

Tout espace vectoriel euclidien possède au moins une base orthonormale.

Théorème de la base orthonormale incomplète

Toute famille orthonormale de E peut être complétée en une base orthonormale de E.

Calculs en base orthonormale

Soit $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ une **base orthonormale** de E.
Pour tout vecteur x de E, on a :

$$\boxed{x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, \varepsilon_i \rangle \, \varepsilon_i}$$

Soit $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ une **base orthonormale** de E, x et y deux vecteurs de E de coordonnées respectives $(x_1, ..., x_n)$ et $(y_1, ..., y_n)$ dans la base $\mathcal{B}$. On note X et Y les matrices de x et de y dans $\mathcal{B}$, c'est-à-dire : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. On a les égalités suivantes :

$$\boxed{\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = {}^t XY \quad \text{et} \quad \| x \|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = {}^t XX}$$

Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace

Soit F un sous-espace vectoriel de E. On appelle *supplémentaire orthogonal* de F, et on note $F^{\perp}$, l'ensemble défini par :

$$\boxed{F^{\perp} = \{ x \in E, \forall y \in F, \langle x, y \rangle = 0 \}}$$

Propriétés du supplémentaire orthogonal

$$\boxed{\{0_E\}^{\perp} = E \ \text{ et } \ E^{\perp} = \{0_E\}}$$

Pour tout sous-espace vectoriel F de E, $F^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Pour tout sous-espace vectoriel F de E, on a : $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F$.

Si A et B sont deux sous-espaces de E, on a les équivalences :

$$A \perp B \iff A \subset B^{\perp} \iff B \subset A^{\perp}$$

Théorème du supplémentaire orthogonal

Pour tout sous-espace F de E, on a :

$$E = F \oplus F^{\perp}$$

Parmi les supplémentaires de F, seul $F^{\perp}$ est orthogonal à F.

Pour tout sous-espace vectoriel F de E, on a :

$$\dim F^{\perp} = \dim E - \dim F$$

Projecteur orthogonal

Soit F un sous-espace de E. On appelle projecteur orthogonal sur F, noté p_F , le projecteur sur F parallèlement à $F^{\perp}$.

Le projecteur associé à p_F est $p_{F^{\perp}}$, qui est le projecteur orthogonal sur $F^{\perp}$.

Projecteurs orthogonaux, noyau, image

Soit p un projecteur. Le projecteur p est orthogonal si, et seulement si :

$$\mathrm{Im}(p) \perp \mathrm{Ker}(p)$$

Caractérisation du projeté orthogonal

Soit F un sous-espace vectoriel de E et p_F le projecteur orthogonal sur F. Pour tout vecteur x de E, on a :

$$p_F(x) \in F \text{ et } x - p_F(x) \in F^{\perp}$$

Projecteur orthogonal en base orthonormale

Soit F un sous-espace vectoriel de E et p_F le projecteur orthogonal sur F. Si $(u_1,...,u_r)$ est une **base orthonormale de *F***, alors, pour tout vecteur x de E, on a :

$$\boxed{p_F(x)=\sum_{i=1}^{r}\langle x,u_i\rangle u_i}$$

Minimisation par projection orthogonale

Soit a un vecteur de E, F un sous-espace de E et p_F le projecteur orthogonal sur F. L'ensemble $\left\{\|a-u\|,\ u\in F\right\}$ admet un minimum atteint en un unique vecteur v de F défini par $v=p_F(a)$.

On a donc l'équivalence :

$$\boxed{v=p_F(a)\ \Leftrightarrow\ \|a-v\|=\min_{u\in F}\|a-u\|}$$

Problème des moindres carrés

Ce résultat est mentionné par le programme mais il n'est pas exigible.

La norme utilisée est la norme euclidienne canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang p et B une matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. L'ensemble $\left\{\|AX-B\|,\ X\in\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\right\}$ admet un minimum atteint en un unique vecteur colonne X_0 de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

On dit que X_0 est une pseudo solution de l'équation $AX=B$.

36. ENDOMORPHISMES SYMÉTRIQUES, FORMES QUADRATIQUES

Dans ce chapitre, E désigne un espace vectoriel euclidien de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$). Le produit scalaire est noté $\langle\ ,\ \rangle$.

Endomorphisme symétrique

Un endomorphisme f de E est dit *symétrique* si, pour tout couple (x, y) de vecteurs de E, on a :

$$\boxed{\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle}$$

L'ensemble des endomorphismes symétriques de E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

L'endomorphisme f de E est symétrique si, et seulement si, il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est symétrique à coefficients réels.

Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace

Si f est un endomorphisme symétrique et si F est un sous-espace vectoriel stable par f, alors $F^\perp$ est stable par f, c'est-à-dire que, pour tout x de $F^\perp$, $f(x) \in F^\perp$.

Réduction des endomorphismes symétriques

Tout endomorphisme symétrique de E possède au moins une valeur propre, et toutes ses valeurs propres sont réelles.

Tout endomorphisme symétrique de E est diagonalisable, et ses sous-espaces propres sont 2 à 2 orthogonaux.

L'endomorphisme f de E est symétrique si, et seulement si, il existe une base orthonormale de E formée de vecteurs propres pour f.

Ce dernier théorème est souvent utilisé "à moitié" en tant que condition suffisante de l'existence d'une base orthonormale de vecteurs propres : si l'endomorphisme f est symétrique, alors il existe une base orthonormale de E formée de vecteurs propres pour f (la matrice de f dans cette base étant, bien sûr, diagonale).

Matrices orthogonales

Toute matrice Ω de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifie ${}^t\Omega\Omega = I_n$ est appelée matrice *orthogonale*.

Si Ω est une matrice orthogonale, alors Ω est inversible et $\Omega^{-1} = {}^t\Omega$.

Toute matrice de passage entre deux bases orthonormales de E est une matrice orthogonale.

Réduction des matrices symétriques

Toute matrice symétrique est diagonalisable avec une matrice de changement de base orthogonale.
Il existe donc une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que : $A = P\,D\,{}^tP$.

Fonctions quadratiques

$\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique. Pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$, on note X l'élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formé des coordonnées du vecteur x dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Soit A une matrice symétrique réelle. On appelle *fonction quadratique* associée à la matrice A, l'application q de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie, pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$, par :

$$\boxed{q(x) = {}^tX\,A\,X}$$

Soit A une matrice symétrique et q la fonction quadratique associée à la matrice A. Si f désigne l'endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice A, alors pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$, on a : $q(x) = \langle x, f(x) \rangle$.

Une fonction quadratique est ainsi indifféremment associée à une matrice symétrique A ou à l'endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A.

Signe d'une fonction quadratique

Soit f un endomorphisme symétrique et q la fonction quadratique associée à f.

Les valeurs propres de f sont positives si, et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \ q(x) \geq 0$$

Les valeurs propres de f sont négatives si, et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \ q(x) \leq 0$$

Les valeurs propres de f sont strictement positives si, et seulement si : $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \ q(x) > 0$.

Les valeurs propres de f sont strictement négatives si, et seulement si : $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \ q(x) < 0$.

&

La mathématique universelle
est une logique de l'imagination.

Leibniz

Probabilités

37. ESPACES PROBABILISÉS

Épreuve aléatoire

On appelle *épreuve aléatoire* (ou expérience aléatoire) une expérience dont les résultats ne dépendent que du hasard.

L'ensemble de tous les résultats possibles, noté Ω, est appelé *univers* associé à l'expérience.

Ensemble des événements

L'ensemble des événements est un sous-ensemble de $\mathcal{P}(\Omega)$, noté $\mathcal{A}$, et vérifiant :

(1) $\Omega \in \mathcal{A}$.

(2) Si $A \in \mathcal{A}$, alors $\overline{A} \in \mathcal{A}$.

(3) Si I désigne une partie quelconque de $\mathbb{N}$ et si $(A_k)_{k\in I}$ est une suite d'événements (éléments de $\mathcal{A}$), alors $\bigcup_{k\in I} A_k \in \mathcal{A}$.

Tout élément de $\mathcal{A}$ est appelé *événement* et le couple $(\Omega, \mathcal{A})$ est appelé espace probabilisable.

Événements particuliers

Ω est appelé l'événement certain.
$\varnothing$ est appelé l'événement impossible.
Les singletons de Ω (parties à 1 élément) sont appelés événements élémentaires.

Intersection

L'événement $A \cap B$ est l'événement qui est réalisé si A **et** B le sont.

Réunion

$A \cup B$ est l'événement qui est réalisé si **l'un au moins** des événements A ou B est réalisé.

Événement contraire

$\overline{A}$ est l'événement qui est réalisé si et seulement si A ne l'est pas.

Comparaison des événements

$A \subset B$ signifie que A est inclus dans B, c'est-à-dire que la réalisation de A implique celle de B.

Deux événements A et B sont égaux si l'on a : $A \subset B$ et $B \subset A$.

Incompatibilité

Deux événements A et B sont dits incompatibles si $A \cap B = \varnothing$.

Système complet d'événements

En désignant par I une partie (finie ou infinie) de $\mathbb{N}$, la famille $(A_k)_{k\in I}$ est un système complet d'événements si :

(1) $\bigcup_{k\in I} A_k = \Omega$

(2) $\forall (i, j) \in I^2,\ i \neq j,\ A_i \cap A_j = \varnothing$ (incompatibilité)

Probabilité

On appelle *probabilité* définie sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$, toute application P de $\mathcal{A}$ dans $[0,1]$, σ-additive et telle que $P(\Omega) = 1$.

Remarque. « P est σ-additive » signifie que, si I désigne une partie quelconque de $\mathbb{N}$ et si $(A_k)_{k\in I}$ est une suite d'événements 2 à 2 incompatibles, alors on a : $P\left(\bigcup_{k\in I} A_k\right) = \sum_{k\in I} P(A_k)$.

Espace probabilisé

Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est appelé espace probabilisé.

Événements quasi certains, quasi impossibles

Un événement A de probabilité égale à 1 est dit *quasi certain*.
On dit aussi qu'*il est presque sûr* que A se réalise.

Un événement A de probabilité nulle est dit *quasi impossible*.
On dit aussi qu'*il est presque sûr* que A ne se réalise pas.

Équiprobabilité

Lors d'une épreuve aléatoire pour laquelle Ω est fini, on dit que l'on est en situation d'équiprobabilité lorsque les événements élémentaires ont tous la même probabilité.

Dans le cas de l'équiprobabilité, on a : $P(A) = \dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$.

Conséquences de la définition d'une probabilité

Pour toute famille finie ou dénombrable $(A_i)_{i\in I}$ d'événements deux à deux incompatibles, on a :

$$P\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} P(A_i)$$

Pour tout événement A, on a : $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

On a, en particulier : $P(\varnothing) = 0$.

Pour tout événement A, on a : $0 \leq P(A) \leq 1$.

Croissance de la probabilité

Si A et B sont deux événements et si $A \subset B$, alors $P(A) \leq P(B)$.

Théorèmes de limite monotone

Si (A_n) est une suite **croissante** d'événements, alors :

$$P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$$

Si (A_n) est une suite **décroissante** d'événements, alors :

$$P\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$$

Conséquence des théorèmes de limite monotone

Si (A_n) est une suite **quelconque** d'événements, alors on a :

$$P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)$$

$$P\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_n\right)$$

Formule du crible (ou formule de Poincaré)

Si A et B sont deux événements, on a :

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

Si A, B et C sont trois événements, on a :

$$\begin{aligned} P(A\cup B\cup C) = {} & P(A) + P(B) + P(C) \\ & - P(A\cap B) - P(B\cap C) - P(A\cap C) \\ & + P(A\cap B\cap C) \end{aligned}$$

38. CONDITIONNEMENT ET INDÉPENDANCE

Probabilité conditionnelle

Soit A et B deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, l'événement B étant de probabilité non nulle.
On appelle *probabilité de A sachant que B est réalisé* ou *probabilité de A sachant B* ou encore *probabilité de A conditionnellement à l'événement B*, le réel noté $P_B(A)$, défini par :

$$\boxed{P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

Une nouvelle probabilité

L'application P_B est une probabilité définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Conséquences

$P_B(\Omega) = 1$ et $P_B(\varnothing) = 0$

$P_B(\overline{A}) = 1 - P_B(A)$

$P_B(E \cup F) = P_B(E) + P_B(F) - P_B(E \cap F)$

Formule des probabilités composées

Si $A_1, A_2, ..., A_n$ sont n événements d'un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, tels que $P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1}) \neq 0$, alors on a :

$$\boxed{P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = P(A_1)\, P_{A_1}(A_2)\, P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \ldots P_{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}}(A_n)}$$

Formule des probabilités totales

Soit I une partie de $\mathbb{N}$. Si $(A_k)_{k \in I}$ est un système complet d'événements, alors pour tout événement B, on a :

$$\boxed{P(B) = \sum_{k \in I} P(B \cap A_k)}$$

Formule des probabilités totales (bis)

Soit I une partie de $\mathbb{N}$.

Si $(A_k)_{k\in I}$ est un système complet d'événements, tous de probabilité non nulle, alors pour tout événement B, on a :

$$\boxed{P(B) = \sum_{k\in I} P(A_k)P_{A_k}(B)}$$

Formule de Bayes

Si A et B sont deux événements de probabilité non nulle, on a :

$$\boxed{P_B(A) = \frac{P(A)P_A(B)}{P(B)}}$$

Indépendance de deux événements

Deux événements A et B définis sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sont indépendants si :

$$\boxed{P(A\cap B) = P(A)P(B)}$$

Si A est de probabilité non nulle, alors A et B sont indépendants si et seulement si :

$$\boxed{P_A(B) = P(B)}$$

Si deux événements A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$ sont indépendants, $\overline{A}$ et B sont indépendants, et, pour finir, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Indépendance deux à deux d'événements

Soit I une partie de $\mathbb{N}$ et $(E_k)_{k\in I}$ une famille d'événements définis sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On dit que ces événements sont deux à deux indépendants si, pour tout couple (i, j) d'éléments distincts de I, les événements E_i et E_j sont indépendants.

Indépendance mutuelle

Soit I une partie, finie ou non, de $\mathbb{N}$ et $(E_k)_{k\in I}$ une famille d'événements définis sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On dit que ces événements sont mutuellement indépendants si, pour tout k de $\mathbb{N}^*$ et pour toute liste $(i_1, i_2, ..., i_k)$ d'éléments distincts de I, on a :

$$\boxed{P(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap ... \cap E_{i_k}) = P(E_{i_1})P(E_{i_2}) ... P(E_{i_k})}$$

"Lemme des coalitions"

Si des événements sont mutuellement indépendants alors tout événement formé avec certains d'entre eux est indépendant de tout événement formé à partir des autres.

&

Si nous attribuons les phénomènes inexpliqués au hasard,
ce n'est que par des lacunes de notre connaissance.

Pierre-Simon Laplace

39. VARIABLES ALÉATOIRES : GÉNÉRALITÉS

Définition d'une variable aléatoire

On appelle *variable aléatoire* définie sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$, toute application X de Ω dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x, l'ensemble $\{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \leq x\}$, noté $(X \leq x)$, appartient à $\mathcal{A}$.

Support d'une variable aléatoire

L'ensemble des valeurs que peut prendre une variable aléatoire X est appelé le *support* (ou l'*image*) de X et est noté $X(\Omega)$.

Fonction de répartition

Si X est une variable aléatoire, on appelle *fonction de répartition* de X, la fonction F définie par :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \ F(x) = P(X \leq x)}$$

Fonction de répartition et intervalles

Soit X une variable aléatoire, de fonction de répartition F.

$$\boxed{\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a < b,\ \ P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)}$$

Propriétés des fonctions de répartition

Toute fonction de répartition F d'une variable aléatoire X, discrète ou non, est croissante sur $\mathbb{R}$, continue à droite en tout réel, et vérifie $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

Ces propriétés ne sont pas exigibles, mais elles permettent de vérifier qu'une fonction de répartition est cohérente.

40. VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES : LOI ET FONCTION DE RÉPARTITION

Variable aléatoire discrète

Une variable aléatoire est discrète si son support est fini ou dénombrable.

Système complet d'événements associé

La famille $\left(X = x\right)_{x \in X(\Omega)}$ est appelée *système complet d'événements* associé à la variable aléatoire discrète X.

Loi d'une variable aléatoire discrète

Déterminer la loi d'une variable aléatoire discrète X, définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, c'est trouver $X(\Omega)$, puis donner, pour tout x de $X(\Omega)$, la valeur de $P(X = x)$.

Si X est une variable aléatoire discrète, définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, dont le support est $X(\Omega)$, on a : $\sum\limits_{x \in X(\Omega)} P(X = x) = 1$.

Soit une partie I de $\mathbb{N}$. On dit que la suite $(u_n)_{n \in I}$ définit la loi de probabilité d'une certaine variable aléatoire X dont le support est I, si :

$$\boxed{\forall n \in I,\ u_n > 0 \text{ et } \sum_{n \in I} u_n = 1}$$

Si tel est le cas, on a : $\forall n \in I$, $P(X = n) = u_n$.

Fonction de répartition d'une variable entière

Si X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$, alors, en désignant par F sa fonction de répartition, on a : $F(n) = P(X \leq n) = \sum\limits_{k=0}^{n} P(X = k)$.

On en déduit : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X = n) = F(n) - F(n-1)}$

41. VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES : ESPÉRANCE ET VARIANCE

Espérance d'une variable aléatoire discrète

Si X est une variable aléatoire discrète **finie**, définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, alors X admet une *espérance*.
Si X est une variable aléatoire discrète **infinie**, définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, alors X admet une *espérance* si et seulement si la série de terme général $x\,P(X=x)$ est **absolument convergente**.
Dans les deux cas, l'espérance $E(X)$ est définie par :

$$\boxed{E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\,P(X=x)}$$

Deux cas particuliers

Si $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$, alors X possède une espérance et on a :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k\,P(X=k) = \sum_{k=1}^{n} k\,P(X=k)$$

Si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et si la série de terme général $k\,P(X=k)$ est **absolument convergente** (en fait, la convergence suffit puisque la série est à termes positifs), alors X possède une espérance et on a :

$$\boxed{E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\,P(X=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\,P(X=k)}$$

Théorème de transfert

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et g une application de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$. Si la série de terme général $g(x)P(X=x)$ est **absolument convergente**, alors $g(X)$ admet une espérance et on a :

$$\boxed{E(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X=x)}$$

Espérance et fonction affine

Si X est une variable aléatoire discrète admettant une espérance, alors, quels que soient les réels a et b, la variable aléatoire $aX + b$ admet elle aussi une espérance et on a :

$$\boxed{E(aX+b) = aE(X)+b}$$

Linéarité de l'espérance

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes qui admettent chacune une espérance, alors, quel que soit le réel a, les variables aléatoires aX et $X + Y$ admettent une espérance. De plus, on a :

$$\boxed{E(aX) = aE(X) \text{ et } E(X+Y) = E(X)+E(Y)}$$

Existence de l'espérance par domination

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes telles que, presque sûrement, on ait $0 \leq |X| \leq Y$. Si Y admet une espérance, alors X admet une espérance et on a :

$$\boxed{|E(X)| \leq E(Y)}$$

Croissance de l'espérance

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes, admettant chacune une espérance, et telles que $X \leq Y$, alors on a :

$$\boxed{E(X) \leq E(Y)}$$

Variable aléatoire centrée

Une variable aléatoire discrète ayant une espérance est dite *centrée* si son espérance est nulle.

Si X a une espérance, alors $X - E(X)$ est une variable centrée.

Espérance conditionnelle

Si la série de terme général $x P_A(X = x)$ est **absolument convergente**, on appelle *espérance conditionnelle* de X sachant que A est réalisé (ou espérance de X pour la probabilité conditionnelle P_A), le réel noté $E(X / A)$, défini par la relation :

$$E(X / A) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P_A(X = x)$$

Si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ ou si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, on a plus simplement :

$$E(X / A) = \sum_{k=1}^{+\infty} k P_A(X = k)$$

Formule de l'espérance totale

Soit I et J deux parties de $\mathbb{N}$, X une variable aléatoire et $\left(A_n\right)_{n \in J}$ un système complet d'événements de probabilités non nulles.

La variable X admet une espérance si, et seulement si :

1) Les espérances conditionnelles $E(X \mid A_n)$ existent.
2) La série $\sum_{n} E\left(\left|X\right| / A_n\right) P\left(A_n\right)$ est convergente.

Dans ce cas, on a :

$$E(X) = \sum_{n \in J} E(X / A_n) P(A_n)$$

Remarque. Si le système complet d'événements $(A_n)_{n \in J}$ est fini, il suffit du premier point pour obtenir l'existence de $E(X)$.

Moment d'ordre 2

Soit X une variable aléatoire discrète. Si la variable aléatoire X^2 possède une espérance, alors le réel $E(X^2)$ est appelé *moment d'ordre* 2 de X et on a : $E(X^2) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^2 P(X = x)$.

Moment d'ordre 2 si X est entière

Si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et si $E(X^2)$ existe, alors :

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 P(X = k)$$

Variance d'une variable aléatoire discrète

Si X est une variable discrète admettant un moment d'ordre 2, alors X admet une *variance* définie par :

$$\boxed{V(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) = \sum_{x \in X(\Omega)} \left(x - E(X)\right)^2 P(X = x)}$$

Écart-type d'une variable aléatoire discrète

Si X est une variable aléatoire discrète admettant une variance, on appelle *écart-type* de X, le réel σ_X défini par :

$$\boxed{\sigma_X = \sqrt{V(X)}}$$

Formule de Koenig-Huygens

Si X est une variable aléatoire discrète admettant une variance, alors :

$$\boxed{V(X) = E(X^2) - (E(X))^2}$$

Variance et fonction affine

Si a et b sont deux réels et si X est une variable aléatoire discrète admettant une variance, alors la variable aléatoire $aX + b$ admet une variance et on a :

$$\boxed{V(aX + b) = a^2 V(X)}$$

Variable aléatoire réduite

Une variable aléatoire discrète ayant une variance est dite *réduite* si sa variance est égale à 1.

Une variable aléatoire discrète X ayant une espérance et une variance est dite *centrée réduite* si :

$$E(X) = 0 \text{ et } V(X) = 1$$

Si X possède une espérance et une variance non nulle, alors la variable aléatoire $X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}}$ est la variable centrée réduite associée à X.

&

Les propositions mathématiques sont reconnues
comme vraies parce que personne n'a intérêt
à ce qu'elles soient fausses.

Montesquieu

42. LOIS DISCRÈTES USUELLES

Variable aléatoire certaine

Support	**Loi**
$X(\Omega)=\{a\}$	$P(X=a)=1$
Espérance	**Variance**
$E(X)=a$	$V(X)=0$

On dit qu'une variable aléatoire X est une variable *quasi certaine* s'il existe un élément a de $X(\Omega)$ tel que $P(X=a)=1$. Dans ce cas, on a encore $E(X)=a$ et $V(X)=0$.

Si X est une variable aléatoire de variance nulle, alors X est une variable quasi certaine.

Loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$

Support	**Loi**
$X(\Omega)=\llbracket 1, n \rrbracket$	$P(X=k)=\dfrac{1}{n}$
Espérance	**Variance**
$E(X)=\dfrac{n+1}{2}$	$V(X)=\dfrac{n^2-1}{12}$

Loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket a, b \rrbracket)$

Support	**Loi**
$X(\Omega)=\llbracket a, b \rrbracket$	$P(X=k)=\dfrac{1}{b-a+1}$
Espérance	**Variance**
$E(X)=\dfrac{a+b}{2}$	$V(X)=\dfrac{(b-a+1)^2-1}{12}$

Les lois uniformes traduisent parfaitement la situation d'équiprobabilité.

Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ avec $p \in [0, 1]$

Support	Loi
$X(\Omega) = \{0, 1\}$	$P(X = 1) = p$
Espérance	**Variance**
$E(X) = p$	$V(X) = p(1-p)$

On a bien sûr : $P(X = 0) = 1 - p$.

Loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ avec $p \in [0, 1]$

Support	Loi
$X(\Omega) = [\![0, n]\!]$	$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
Espérance	**Variance**
$E(X) = n\,p$	$V(X) = n\,p(1-p)$

Une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ peut être considérée comme le nombre de succès obtenus au cours de n épreuves *indépendantes*, chacune ayant deux issues possibles, le succès de probabilité p et l'échec de probabilité $1-p$.

Loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ avec $0 < p < 1$

Support	Loi
$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$	$P(X = k) = (1-p)^{k-1}\,p$
Espérance	**Variance**
$E(X) = \dfrac{1}{p}$	$V(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$

Une variable aléatoire géométrique peut être considérée comme le rang du premier succès au cours d'une succession d'épreuves *indépendantes*, chacune ayant deux issues possibles, le succès de probabilité p et l'échec de probabilité $1-p$.

Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$

Support	**Loi**
$X(\Omega) = \mathbb{N}$	$P(X = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda}$
Espérance	**Variance**
$E(X) = \lambda$	$V(X) = \lambda$

&

Comment se fait-il qu'il y ait des gens
qui ne comprennent pas les mathématiques ?

Henri Poincaré

43. COUPLES DE VARIABLES DISCRÈTES

Loi d'un couple ou loi conjointe

Déterminer la loi d'un couple (X, Y) de variables aléatoires discrètes, c'est donner, pour tout (x, y) de $X(\Omega)\times Y(\Omega)$, la valeur de la probabilité $P\left(\left[X=x\right]\cap\left[Y=y\right]\right)$.

Lois marginales

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes.
La loi de X est donnée par la formule des probabilités totales associée au système complet d'événements $\left(Y=y\right)_{y\in Y(\Omega)}$:

$$\forall x\in X(\Omega),\ P(X=x)=\sum_{y\in Y(\Omega)} P\left(\left[X=x\right]\cap\left[Y=y\right]\right)$$

La loi de Y est donnée par la formule des probabilités totales associée au système complet d'événements $\left(X=x\right)_{x\in X(\Omega)}$:

$$\forall y\in Y(\Omega),\ P(Y=y)=\sum_{x\in X(\Omega)} P\left(\left[X=x\right]\cap\left[Y=y\right]\right)$$

Indépendance de deux variables aléatoires

Deux variables aléatoires discrètes X et Y sont dites *indépendantes* si, pour tout couple $(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)$, on a :

$$P\left(\left[X=x\right]\cap\left[Y=y\right]\right)=P(X=x)\,P(Y=y)$$

Lois conditionnelles

La loi de X, conditionnellement à l'événement ($Y=y$), est définie par la donnée, pour tout x de $X(\Omega)$, de $P_{(Y=y)}(X=x)$.

La loi de Y, conditionnellement à l'événement ($X=x$), est définie par la donnée, pour tout y de $Y(\Omega)$, de $P_{(X=x)}(Y=y)$.

Lois marginales et lois conditionnelles

Si l'on connaît la loi marginale de Y, ainsi que la loi conditionnelle de X sachant que $(Y = y)$ est réalisé, alors la loi de X est encore déterminée par la formule des probabilités totales :

$$\forall x \in X(\Omega),\ P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(Y = y) P_{(Y=y)}(X = x)$$

Si l'on connaît la loi marginale de X et la loi conditionnelle de Y sachant que $(X = x)$ est réalisé, alors la loi de Y est aussi déterminée par la formule des probabilités totales :

$$\forall y \in Y(\Omega),\ P(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) P_{(X=x)}(Y = y)$$

Loi de somme

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes **à valeurs entières**.
La formule des probabilités totales associé au système complet d'événements $\left(X = i\right)_{i \in X(\Omega)}$ montre que, pour tout entier naturel n de $\left(X + Y\right)\left(\Omega\right)$, on a :

$$P\left(X + Y = n\right) = \sum_{i \in X(\Omega)} P(\,[X = i] \cap [X + Y = n]\,)$$

Ceci peut se réécrire :

$$P\left(X + Y = n\right) = \sum_{i \in X(\Omega)} P(\,[X = i] \cap [Y = n - i]\,)$$

Il reste à "trier" et ne conserver que les indices i pour lesquels $(Y = n - i)$ n'est pas impossible.
Si X et Y sont de plus indépendantes, on a :

$$P\left(X + Y = n\right) = \sum_{i \in X(\Omega)} P(X = i) P(Y = n - i)$$

Il reste, ici aussi, à "trier" et ne conserver que les indices i pour lesquels $P(Y = n - i) \neq 0$.

Remarque. On peut bien sûr utiliser la formule des probabilités totales associé au système complet d'événements $(Y=j)_{j\in Y(\Omega)}$.

On obtient alors :

$$\boxed{P(X+Y=n)=\sum_{j\in Y(\Omega)} P([X=n-j]\cap[Y=j])}$$

Il reste, comme d'habitude à "trier" et ne conserver que les indices j pour lesquels $(X=n-j)$ n'est pas impossible.

Stabilité de la loi binomiale par l'addition

Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement les lois $\mathcal{B}(n_1, p)$ et $\mathcal{B}(n_2, p)$, alors X_1+X_2 suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n_1+n_2, p)$.

Stabilité de la loi de Poisson par l'addition

Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement les lois $\mathcal{P}(\lambda_1)$ et $\mathcal{P}(\lambda_2)$, alors X_1+X_2 suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda_1+\lambda_2)$.

Loi de max

Il faut savoir justifier ce qui suit :

Si l'on pose $M=\max(X,Y)$, où X et Y sont deux variables aléatoires **à valeurs entières**, alors :

$$\forall k\in M(\Omega),\ (M\le k)=(X\le k)\cap(Y\le k)$$

Ayant obtenu $P(M\le k)$, il reste ensuite à utiliser la formule :

$$P(M=k)=P(M\le k)-P(M\le k-1)$$

Loi de min

Il faut savoir justifier ce qui suit :

Si l'on pose $I = \min(X, Y)$, où X et Y sont deux variables aléatoires **à valeurs entières**, alors :

$$\forall k \in I(\Omega)\ ,\ (I > k) = (X > k) \cap (Y > k)$$

Ayant obtenu $P(I > k)$, il reste ensuite à montrer que :

$$P(I = k) = P(I > k-1) - P(I > k)$$

Les mathématiques ne sont pas
une moindre immensité que la mer.

Victor Hugo

44. COVARIANCE ET CORRÉLATION

Espérance d'un produit

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes. Si la variable aléatoire XY possède une espérance, alors cette dernière est donnée par :

$$E(XY) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} x\,y\,P\left(\left[X = x\right] \cap \left[Y = y\right]\right)$$

L'existence est acquise, soit si la somme est finie, soit si la série en jeu converge absolument.

Si X et Y sont **deux variables de Bernoulli**, alors on a :

$$E(XY) = P\left(\left[X = 1\right] \cap \left[Y = 1\right]\right)$$

Définition de la covariance

On appelle *covariance* de X et Y, le réel défini, s'il existe, par :

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E\Big(\big(X - E(X)\big)\big(Y - E(Y)\big)\Big)$$

Formule de Huygens

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Symétrie de la covariance

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X)$$

Lien entre covariance et variance

$$\mathrm{Cov}(X,X) = V(X)$$

Bilinéarité de la covariance

$$\boxed{\operatorname{Cov}(aX_1 + bX_2, Y) = a\operatorname{Cov}(X_1, Y) + b\operatorname{Cov}(X_2, Y)}$$

$$\boxed{\operatorname{Cov}(X, aY_1 + bY_2) = a\operatorname{Cov}(X, Y_1) + b\operatorname{Cov}(X, Y_2)}$$

Variable quasi certaine et covariance

Si A est une variable aléatoire quasi certaine, alors $\operatorname{Cov}(A, X) = 0$

Corrélation linéaire

On désigne par X et Y deux variables aléatoires de variances strictement positives.

On appelle *coefficient de corrélation linéaire* de X et Y, le réel

$$\boxed{\rho(X,Y) = \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}}$$

Le coefficient de corrélation linéaire de X et Y appartient à $[-1, 1]$.

$$\boxed{\rho(X,Y) = \pm 1 \Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R},\ P(Y = aX + b) = 1.}$$

- a est positif (Y varie dans le même sens que X) si, et seulement si, $\rho(X,Y) = 1$.
- a est négatif (Y varie dans le sens contraire de X) si, et seulement si, $\rho(X,Y) = -1$.

Variance de la somme de 2 variables

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et admettant des variances, alors, d'une part, la covariance de X et Y existe, d'autre part, $X + Y$ admet une variance, et l'on a :

$$\boxed{V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\operatorname{Cov}(X,Y)}$$

Variables indépendantes et covariance

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes **indépendantes**, et telles que $E(XY)$ existe, alors on a :

$$E(XY) = E(X)\,E(Y)$$

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes **indépendantes**, et telles que $E(XY)$ existe, alors on a : $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$.

Variance de somme (indépendance)

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes **indépendantes**, admettant une variance, alors on a :

$$\boxed{V(X+Y)=V(X)+V(Y)}$$

&

La vie n'est bonne qu'à deux choses : découvrir les mathématiques et enseigner les mathématiques.

Siméon Denis Poisson

45. SUITES DE VARIABLES DISCRÈTES

Vecteur aléatoire

Si $X_1, X_2, ..., X_n$ sont des variables aléatoires réelles discrètes, définies sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$, alors le n-uplet $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ est appelé *vecteur aléatoire* sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Loi d'un vecteur aléatoire

Si $X_1, X_2, ..., X_n$ sont des variables aléatoires réelles discrètes, définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, donner la loi du vecteur $(X_1, X_2, ..., X_n)$, ou loi conjointe de $X_1, X_2, ..., X_n$, c'est donner la valeur des probabilités $P\left(\left[X_1 = x_1\right] \cap \left[X_2 = x_2\right] \cap ... \cap \left[X_n = x_n\right]\right)$, où, pour tout i de $[\![1, n]\!]$, x_i est un élément quelconque de $X_i(\Omega)$.

Linéarité de l'espérance

Si $X_1, X_2, ..., X_n$ sont des variables aléatoires discrètes ayant une espérance, on a :

$$E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k)$$

Indépendance mutuelle

Les variables aléatoires discrètes $X_1, X_2, ..., X_n$ sont mutuellement indépendantes si, pour tout $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\boxed{P\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i = x_i]\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i)}$$

Suite de variables discrètes indépendantes

On dit qu'une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes si, pour toute partie I finie de $\mathbb{N}^*$ et pour toute suite $(x_i)_{i\in I}$, on a :

$$P\left(\bigcap_{i\in I}[X_i = x_i]\right) = \prod_{i\in I} P(X_i = x_i)$$

"Lemme des coalitions"

Si $X_1, X_2, ..., X_n$ sont n variables discrètes mutuellement indépendantes, alors toute fonction de certaines d'entre elles est indépendante de toute fonction d'autres de ces variables.

Variance de somme (indépendance)

Si les variables aléatoires discrètes $X_1, X_2, ..., X_n$ sont **deux à deux indépendantes** et possèdent des variances, alors on a :

$$\boxed{V\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k)}$$

Somme de variables de Bernoulli

Si n variables aléatoires $X_1, X_2, ..., X_n$ sont **mutuellement indépendantes** et suivent toutes la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, alors $X_1 + X_2 + ... + X_n$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Stabilité de la loi binomiale par l'addition

Si $X_1, X_2, ..., X_n$ sont n variables discrètes mutuellement indépendantes, et si, pour tout i de $[\![1,n]\!]$, X_i suit la loi binomiale $\mathcal{B}(m_i, p)$, alors :

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \text{ suit la loi binomiale } \mathcal{B}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i, p\right)$$

Stabilité de la loi de Poisson par l'addition

Si $X_1, X_2, ..., X_n$ sont n variables discrètes mutuellement indépendantes et si, pour tout i de $[\![1,n]\!]$, X_i suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda_i)$, alors :

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \text{ suit la loi de Poisson } \mathcal{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$$

Recherche de la loi du max de *n* variables

Il faut savoir justifier ce qui suit :

Si l'on pose $M_n = \max(X_1, X_2, ..., X_n)$, où $X_1, X_2, ..., X_n$ sont des variables aléatoires **à valeurs entières**, alors :

$$\forall k \in M_n(\Omega),\ (M_n \leq k) = \bigcap_{i=1}^{n} (X_i \leq k)$$

Si $X_1, X_2, ..., X_n$ sont **mutuellement indépendantes** et de même fonction de répartition F, on a : $P(M_n \leq k) = \left(F(k)\right)^n$.

Ensuite, on utilise : $P(M_n = k) = P(M_n \leq k) - P(M_n \leq k-1)$.

Recherche de la loi du min de *n* variables

Il faut savoir justifier ce qui suit :

Si l'on pose $I_n = \min(X_1, X_2, ..., X_n)$, où $X_1, X_2, ..., X_n$ sont des variables aléatoires **à valeurs entières**, alors :

$$\forall k \in I_n(\Omega),\ (I_n > k) = \bigcap_{i=1}^{n} (X_i > k)$$

Si $X_1, X_2, ..., X_n$ sont **mutuellement indépendantes** et de même fonction de répartition F, on a : $P(I_n > k) = \left(1 - F(k)\right)^n$.

Ensuite, il faut montrer que $P(I_n = k) = P(I_n > k-1) - P(I_n > k)$.

46. VARIABLES ALÉATOIRES À DENSITÉ

Définition

Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F_X .
On dit que X est une *variable à densité* lorsque F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Densité

Si X est une variable à densité, de fonction de répartition F_X , alors toute fonction f_X , définie et positive sur $\mathbb{R}$, telle que $f_X(x) = F_X'(x)$ en chaque réel x où F_X est de classe C^1 , est une densité de X. On a alors l'égalité très importante :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \ F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t}$$

Propriété caractéristique d'une densité

Une fonction f est une densité si et seulement si :
- f est définie sur $\mathbb{R}$ et possède un nombre fini de points de discontinuité.
- f est une fonction à valeurs positives.
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et est égale à 1.

Densité, fonction de répartition et probabilités

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \ 1 - F_X(x) = P(X > x) = \int_{x}^{+\infty} f_X(t)\,\mathrm{d}t}$$

Si X est une variable à densité, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, \ P(X = x) = 0$.

Soit X une variable aléatoire de densité f_X, de fonction de répartition F_X. Pour tout (a, b) de $\mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, on a :

$$\boxed{P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(t)\,\mathrm{d}t}$$

Si X est une variable à densité, on a :

$$\boxed{P(a < X \leq b) = P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a \leq X \leq b)}$$

Définition de l'espérance

Sous réserve de convergence absolue de l'intégrale écrite, l'*espérance* de la variable X (de densité f_X) est le réel :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

Fonction affine et espérance

Si a et b sont deux réels et si X est une variable aléatoire à densité admettant une espérance, alors on a :

$$\boxed{E(aX + b) = aE(X) + b}$$

Une variable aléatoire à densité ayant une espérance est dite *centrée* si son espérance est nulle (exemple : $X - E(X)$).

Existence de l'espérance par domination

Soit X et Y sont deux variables aléatoires à densité telles que, presque sûrement, on ait : $0 \leq |X| \leq Y$. Si Y admet une espérance, alors X admet une espérance et on a :

$$\boxed{|E(X)| \leq E(Y)}$$

Croissance de l'espérance

Si X et Y sont deux variables aléatoires à densité, admettant chacune une espérance, et telles que $X \leq Y$, alors on a :

$$\boxed{E(X) \leq E(Y)}$$

Théorème de transfert

Si X est une variable aléatoire de densité f_X, dont le support est un intervalle I d'extrémités a et b (réels ou infinis), et si g est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ et continue sur I (sauf éventuellement en un nombre fini de points), alors $E(g(X))$ existe si, et seulement si, l'intégrale $\int_a^b g(t)\,f_X(t)\,dt$ est absolument convergente, et on a :

$$\boxed{E(g(X)) = \int_a^b g(t)\,f_X(t)\,\mathrm{d}t}$$

Moment d'ordre 2

Sous réserve de convergence absolue de l'intégrale écrite, le *moment d'ordre* 2 de la variable aléatoire X (de densité f_X) est le réel :

$$\boxed{E\left(X^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_X(t)\,\mathrm{d}t}$$

Variance

Si X est une variable aléatoire de densité f_X admettant un moment d'ordre 2, alors elle possède une espérance et une *variance* définie par :

$$\boxed{V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(t - E(X)\right)^2 f_X(t)\,\mathrm{d}t}$$

Formule de Koenig-Huygens

Si X est une variable aléatoire à densité possédant une variance, alors on a :

$$\boxed{V(X) = E\left(X^2\right) - \left(E(X)\right)^2}$$

Fonction affine et variance

Si a et b sont deux réels et si X est une variable aléatoire à densité admettant une variance, alors on a :

$$\boxed{V(aX + b) = a^2 V(X)}$$

Variable aléatoire réduite

Une variable aléatoire à densité ayant une variance est dite *réduite* si sa variance est égale à 1.

Une variable aléatoire à densité X ayant une espérance et une variance est dite *centrée réduite* si : $E(X) = 0$ et $V(X) = 1$.

Si X possède une espérance et une variance non nulle, alors la variable aléatoire $X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}}$ est la variable centrée réduite associée à X.

&

Les mathématiques consistent à démontrer
des choses évidentes par des moyens complexes.

George Polya

47. LOIS À DENSITÉ USUELLES

Loi uniforme sur [*a*, *b*] avec *a* < *b*

Densité	Fonction de répartition
$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$
Espérance	**Variance**
$E(X) = \dfrac{a+b}{2}$	$V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

Cas particulier : loi uniforme sur [0, 1]

Densité	Fonction de répartition
$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in [0, 1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ x \text{ si } x \in [0, 1] \\ 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$
Espérance	**Variance**
$E(X) = \dfrac{1}{2}$	$V(X) = \dfrac{1}{12}$

Lien entre les lois uniformes

$$\boxed{X \text{ suit la loi } \mathcal{U}([0,1]) \iff (b-a)X + a \text{ suit la loi } \mathcal{U}([a,b])}$$

Loi exponentielle de paramètre λ, avec λ > 0

Densité	Fonction de répartition
$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$
Espérance	**Variance**
$E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$	$V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$

Absence de mémoire

Les variables aléatoires suivant une loi exponentielle sont (mises à part la variable quasi-certaine égale à 0) les seules variables aléatoires positives sans mémoire :

$$\boxed{\forall (t,h) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ \ P(X > t + h) = P(X > t)P(X > h)}$$

Si $P(X > h) \neq 0$, la propriété d'absence de mémoire s'écrit :

$$\boxed{\forall (t,h) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ P_{(X>h)}(X > t + h) = P(X > t)}$$

Lien entre les lois exponentielles

$$\boxed{X \text{ suit } \mathcal{E}\,(1) \ \Leftrightarrow\ \frac{1}{\lambda}X \ \text{ suit } \mathcal{E}(\lambda)}$$

Loi gamma $\gamma(t)$ avec $t > 0$

Densité	Fonction de répartition
$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ \dfrac{1}{\Gamma(t)} x^{t-1} \mathrm{e}^{-x} \text{ si } x > 0 \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ \int_0^x f(u)\mathrm{d}u \text{ si } x > 0 \end{cases}$
Espérance	**Variance**
$E(X) = t$	$V(X) = t$

Cas particulier

Comme la loi exponentielle de paramètre 1 est la loi $\gamma(1)$, alors la somme de n variables indépendantes suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1 suit la loi $\gamma(n)$.

Loi de Laplace-Gauss

C'est l'autre nom pour une loi normale (voir plus loin).

Loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, avec $\sigma > 0$

Densité	Fonction de répartition
$\varphi_{m,\sigma}(t) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}$	$\Phi_{m,\sigma}(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_{m,\sigma}(t)\,\mathrm{d}t$
Espérance	**Variance**
$E(X) = m$	$V(X) = \sigma^2$

Loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$

Densité	Fonction de répartition
$\varphi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$	$\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$
Espérance	**Variance**
$E(X) = 0$	$V(X) = 1$

Propriétés de Φ

Pour tout réel x, on a :

$$\boxed{\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)}$$

On en déduit : $\Phi(0) = \dfrac{1}{2}$

Loi normale et fonction affine

On désigne par a et b deux réels (avec $a \neq 0$).

$$\boxed{X \text{ suit la loi } \mathcal{N}(m, \sigma^2) \iff aX + b \text{ suit la loi } \mathcal{N}(am + b, a^2\sigma^2)}$$

Lien entre les lois normales

Si σ et m sont deux réels (avec $\sigma > 0$), on a l'équivalence suivante :

$$\boxed{X \text{ suit la loi } \mathcal{N}(m, \sigma^2) \iff \frac{X - m}{\sigma} \text{ suit la loi } \mathcal{N}(0, 1)}$$

48. COUPLES DE VARIABLES À DENSITÉ

Définition

La loi d'un couple (X, Y) de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est donnée par la fonction $F_{(X,Y)}$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ F_{(X,Y)}(x, y) = P\left(\left[X \leq x\right] \cap \left[Y \leq y\right]\right)$$

Linéarité de l'espérance

Si X et Y sont deux variables aléatoires à densité admettant chacune une espérance, alors $X + Y$ admet une espérance et on a :

$$\boxed{E(X+Y) = E(X) + E(Y)}$$

Indépendance

Deux variables aléatoires à densité, X et Y, sont indépendantes si, pour tout couple de réels (x, y), on a :

$$P\left([X \leq x] \cap [Y \leq y]\right) = P\left(X \leq x\right) P\left(Y \leq y\right)$$

Remarque. Cette définition reste valable pour tout couple de variables aléatoires, discrètes ou à densité (et même pour des variables, qui ne sont, ni discrètes, ni à densité).

Lemme des coalitions

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors toute variable aléatoire fonction de X est indépendante de toute variable aléatoire fonction de Y.

Variance d'une somme

Si X et Y sont deux variables aléatoires à densité, **indépendantes**, et admettant chacune une variance, alors $X + Y$ admet une variance et on a :

$$\boxed{V(X+Y) = V(X) + V(Y)}$$

Fonction d'un couple

Si deux couples (X_1,Y_1) et (X_2,Y_2) ont la même loi et si g est une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors $g(X_1,Y_1)$ et $g(X_2,Y_2)$ sont deux variables aléatoires de même loi.

Convolution : loi de somme

Soit X et Y deux variables aléatoires à densité, **indépendantes**, de densités respectives f_X et f_Y. Si la fonction h, définie par

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\, f_Y(x-t)\,\mathrm{d}t$$

est définie et continue, sauf éventuellement en un nombre fini de points, alors ***h* est une densité de** $X+Y$.

La convergence de l'intégrale définissant h, ainsi que la continuité de h (sauf peut-être en un nombre fini de points) sont assurées dès que f_X ou f_Y est bornée.

Stabilité par l'addition des lois "gamma"

Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes, suivant respectivement les loi $\gamma(\nu_1)$ et $\gamma(\nu_2)$, alors :

$$X_1 + X_2 \text{ suit la loi } \gamma(\nu_1 + \nu_2)$$

Stabilité par l'addition des lois normales

Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes, suivant respectivement les loi $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$, alors :

$$X_1 + X_2 \text{ suit la loi } \mathcal{N}\left(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2\right).$$

Loi de max

Si l'on pose $M = \max(X, Y)$, où X et Y sont deux variables aléatoires à densité, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (M \le x) = (X \le x) \cap (Y \le x)$$

Loi de min

Si l'on pose $I = \min(X, Y)$, où X et Y sont deux variables aléatoires à densité, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ (I > x) = (X > x) \cap (Y > x)$$

&

On se souviendra d'Archimède
quand on aura oublié Eschyle,
parce que les langues meurent,
mais pas les idées mathématiques.

Godfrey Hardy

49. SUITES DE VARIABLES À DENSITÉ

Linéarité de l'espérance

Si $X_1, X_2, ..., X_n$ sont n variables aléatoires à densité, possédant chacune une espérance, si $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ sont n réels, alors $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$ possède une espérance et on a : $E\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i E(X_i)$.

En particulier :

$$\boxed{E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)}$$

Indépendance mutuelle

Les variables à densité $X_1, X_2, ..., X_n$ sont dites mutuellement indépendantes si, pour tout $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on a :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leq x_i]\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq x_i)$$

On dit qu'une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes si, pour toute partie I finie de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$P\left(\bigcap_{i \in I} [X_i \leq x_i]\right) = \prod_{i \in I} P\left(X_i \leq x_i\right)$$

Remarque. Ces définitions restent valables pour toutes les variables aléatoires, discrètes ou à densité (et même pour des variables, qui ne sont, ni discrètes, ni à densité).

"Lemme des coalitions"

Si $X_1, X_2, ..., X_n$ sont n variables à densité mutuellement indépendantes, alors toute fonction de certaines d'entre elles est indépendante de toute fonction d'autres de ces variables.

Variance d'une somme

Si $X_1, X_2, ..., X_n$ sont des variables aléatoires à densité, **mutuellement indépendantes** (ou même seulement **deux à deux indépendantes**) et si $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ sont n réels, alors $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$ possède une variance et on a : $V\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 V(X_i)$.

En particulier :

$$\boxed{V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)}$$

Stabilité par l'addition des lois "gamma"

Si (X_i) est une suite de variables aléatoires indépendantes, et telles que pour tout i de $\mathbb{N}^*$, X_i suit la loi γ(ν_i), alors :

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \text{ suit la loi } \gamma\left(\sum_{i=1}^{n} \nu_i\right)$$

Cas particulier de la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$

Si n variables aléatoires, $X_1, X_2, ..., X_n$, sont mutuellement indépendantes, de même loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$, alors $\sum_{i=1}^{n} X_i$ suit la loi gamma $\gamma(n)$.

Stabilité par l'addition des lois normales

Si $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, et telles que pour tout i de $\mathbb{N}^*$, X_i suit la loi $\mathcal{N}(m_i, \sigma_i^2)$, alors :

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \text{ suit la loi } \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i , \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right).$$

Recherche de la loi du max de *n* variables

Il faut savoir justifier ce qui suit :

Si l'on pose $M_n = \max(X_1, X_2, ..., X_n)$, où $X_1, X_2, ..., X_n$ sont des variables aléatoires **à densité**, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (M_n \leq x) = \bigcap_{i=1}^{n} (X_i \leq x)$$

Si $X_1, X_2, ..., X_n$ sont **mutuellement indépendantes** et de même fonction de répartition F, on a : $P(M_n \leq x) = \left(F(x)\right)^n$.

Recherche de la loi du min de *n* variables

Il faut savoir justifier ce qui suit :

Si l'on pose $I_n = \min(X_1, X_2, ..., X_n)$, où $X_1, X_2, ..., X_n$ sont des variables aléatoires **à densité**, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (I_n > x) = \bigcap_{i=1}^{n} (X_i > x)$$

Si $X_1, X_2, ..., X_n$ sont **mutuellement indépendantes** et de même fonction de répartition F, on a : $P(I_n > x) = \left(1 - F(x)\right)^n$.

&

La prévision est toujours difficile,
surtout lorsqu'elle concerne le futur.

Niels Bohr

50. CONVERGENCES

Inégalité de Markov

Si X est une variable aléatoire positive (discrète ou à densité) possédant une espérance, alors on a :

$$\forall a > 0 , \ P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Si X est une variable aléatoire (discrète ou à densité) possédant une espérance et une variance, alors on a :

$$\forall \varepsilon > 0 , \ P(\left| X - E(X) \right| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

Convergence en probabilité

Soit une variable aléatoire X et une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires, définies sur le même espace probabilisé que X.

On dit que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ *converge en probabilité* vers la variable aléatoire X, et on note $X_n \xrightarrow{P} X$, si :

$$\forall \varepsilon > 0 , \ \lim_{n\to +\infty} P(\left| X_n - X \right| \geq \varepsilon) = 0$$

Loi faible des grands nombres

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé, indépendantes, ayant chacune une même espérance m et une même variance.

Si l'on pose $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, alors la suite $\left(\overline{X}_n\right)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à m. On a donc :

$$\forall \varepsilon > 0 , \ \lim_{n\to +\infty} P(\left| \overline{X}_n - m \right| \geq \varepsilon) = 0$$

Composition par une fonction continue

Si $X_n \xrightarrow{P} X$ et si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, alors $f(X_n) \xrightarrow{P} f(X)$.

Convergence en probabilité et addition

Si $X_n \xrightarrow{P} X$ et si $Y_n \xrightarrow{P} Y$, alors $X_n + Y_n \xrightarrow{P} X + Y$.

Convergence en loi

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires toutes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, X_n ayant pour fonction de répartition F_n.
Soit X une variable aléatoire définie également sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et de fonction de répartition F.
On dit que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en loi* vers X si, en tout point x où F est continue, on a :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = F(x)}$$

On note : $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Convergence en loi (cas discret)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes et X une variable aléatoire discrète, toutes définies sur le même espace probabilisé et à valeurs dans $\mathbb{N}$. La suite (X_n) converge en loi vers X si et seulement si :

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N},\ \lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = P(X = k)}$$

Cas particulier : loi binomiale vers loi de Poisson

Soit λ un réel strictement positif. Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires telles que, pour tout entier naturel n supérieur à λ, X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n,\frac{\lambda}{n}\right)$, alors la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire X suivant la loi de Poisson de paramètre λ.

Composition par une fonction continue

Si (X_n) converge en loi vers X et si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, alors $\left(f(X_n)\right)$ converge en loi vers $f(X)$.

Théorème limite central

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et de même loi, ayant chacune une espérance m et une variance σ^2 non nulle.

Si l'on note $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, alors la suite de variables aléatoires centrées réduites $\overline{X}_n^{\,*} = \frac{\overline{X}_n - E(\overline{X}_n)}{\sqrt{V(\overline{X}_n)}} = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - m}{\sigma}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. On a donc :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \lim_{n\to+\infty} P(\overline{X}_n^{\,*} \le x) = \Phi(x)}$$

On en déduit :

$$\boxed{\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \lim_{n\to+\infty} P\left(a \le \overline{X}_n^{\,*} \le b\right) = \Phi(b) - \Phi(a)}$$

Approximations

- On approche la loi $\mathcal{B}(n,p)$ par la loi $\mathcal{N}(np, npq)$ dès que $n \ge 20$ et p voisin de 0,5.
- On approche la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ par la loi $\mathcal{N}(\lambda,\lambda)$ dès que $\lambda \ge 10$.

51. ESTIMATION

Présentation

On considère une variable aléatoire X dont le type de loi est connu et dépend d'un paramètre inconnu θ, réel (comme le paramètre λ d'une variable exponentielle) ou vectoriel (comme le couple (m, σ^2) d'une variable normale). L'objectif est de donner une *estimation* de la valeur d'un certain réel de la forme $g(\theta)$.
Dans les énoncés de concours, la quantité que l'on souhaite estimer est notée θ, et non pas $g(\theta)$, nous noterons donc θ la quantité à estimer.
On désigne par n un entier naturel au moins égal à 2.

Échantillonnage

On appelle *n-échantillon* de la loi de X tout n-uplet $(X_1, X_2, ..., X_n)$ de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et ayant toutes la loi de X.

Si $(X_1, X_2, ..., X_n)$ est un échantillon de la loi de X, on appelle *réalisation* de cet échantillon (ou aussi *échantillon observé*), tout n-uplet $(x_1, x_2, ..., x_n)$, où, pour tout k de $[\![1, n]\!]$, x_k est la valeur prise par la variable aléatoire X_k.

Estimateur

Si $(X_1, X_2, ..., X_n)$ est un échantillon de la loi de X, on appelle *estimateur* de θ toute variable aléatoire fonction de $X_1, X_2, ..., X_n$, mais indépendante de θ.

Si $\varphi_n(X_1, X_2, ..., X_n)$ est un estimateur de θ, alors $\varphi_n(x_1, x_2, ..., x_n)$ est une *estimation* de θ, c'est-à-dire la valeur que le statisticien accordera à θ.

Biais

Soit T_n un estimateur de θ. On appelle *biais* de T_n la quantité :

$$\boxed{b_\theta(T_n) = E(T_n) - \theta}$$

On dit que T_n est un *estimateur sans biais* de θ si $E(T_n) = \theta$.

Estimateur convergent

On dit qu'une suite $(T_n)_{n\geq 1}$ d'estimateurs de θ est convergente si la suite $(T_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers θ, c'est-à-dire si :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \lim_{n\to+\infty} P(\left| X_n - X \right| \geq \varepsilon) = 0$$

Par abus de langage, on dit aussi que l'estimateur T_n est convergent.

Moyenne empirique

On désigne par $(X_1, X_2, ..., X_n)$ un échantillon de la loi de X.

La moyenne empirique de l'échantillon est $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

La moyenne empirique $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ est un estimateur sans biais et convergent de l'espérance de X.

Condition suffisante de convergence

Pour qu'une suite $(T_n)_{n\geq 1}$ d'estimateurs de θ, ayant des moments d'ordre 2, soit convergente, il suffit que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} E(T_n) = \theta \ \text{ et } \ \lim_{n\to+\infty} V(T_n) = 0}$$

Fonction continue d'un estimateur convergent

Si $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite convergente d'estimateurs de θ, et si *f* est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, alors $\left(f(T_n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite convergente d'estimateurs de $f(\theta)$.

Intervalle de confiance

Soit α un réel élément de $[0,1]$ et U_n et V_n deux variables aléatoires, fonctions de $X_1, X_2, ..., X_n$.
L'intervalle $[U_n, V_n]$ est un *intervalle de confiance* de θ au niveau de confiance au moins égal à $1-\alpha$ si l'on a :

$$P(U_n \leq \theta \leq V_n) \geq 1-\alpha$$

Si $U_n = \varphi_n(X_1, ..., X_n)$ et $V_n = \psi_n(X_1, ..., X_n)$, alors, en posant $u_n = \varphi_n(x_1, ..., x_n)$ et $v_n = \psi_n(x_1, x_2, ..., x_n)$, l'intervalle $[u_n, v_n]$ est l'estimation de l'intervalle de confiance.

Remarque. Si $(X_1, X_2, ..., X_n)$ est un échantillon de la loi de *X* et si *m* désigne l'espérance de *X*, on obtient un intervalle de confiance pour *m* grâce à l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à $\overline{X}_n$.

Intervalle de confiance asymptotique

L'intervalle $[U_n, V_n]$ est un *intervalle de confiance asymptotique* de θ au niveau de confiance au moins égal à $1-\alpha$ s'il existe une suite de réels (α_n) à valeurs dans $[0,1]$, de limite α, telle que, pour tout entier naturel *n*, on a : $P(U_n \leq \theta \leq V_n) \geq 1-\alpha_n$.

Remarque. Les intervalles de confiance asymptotiques s'obtiennent grâce au théorème limite central.

Informatique (Python)

52. INFORMATIQUE : GÉNÉRALITÉS

Commentaires Python

Dans un programme, on insère les éventuels commentaires en fin de ligne, après le symbole #.

Variable

Une variable est un emplacement de mémoire dans lequel on peut stocker un contenu (numérique, matriciel, booléen ou autre).

Type

Le type d'une variable est la nature de son contenu.

- `int` : les entiers.
- `float` : les nombres à virgule.
- `bool` : les booléens.
- `str` : les chaînes de caractères.
- `np.array` : les objets matriciels.

Booléen

Le contenu d'une variable est booléen quand il peut être qualifié de vrai (il a alors la valeur `True`) ou de faux (`False`).

Chaîne de caractères

Une chaîne de caractères est une suite de symboles du clavier écrits entre guillemets (ou entre apostrophes si la chaîne ne contient pas elle-même d'apostrophe).

Affectation

L'instruction `a=4` crée la variable `a` et lui affecte la valeur 4.

Instruction input

L'instruction `a=input("texte")` affiche le *texte* d'invite écrit entre guillemets. La chaîne de caractères entrée au clavier par l'utilisateur est ensuite affectée à la variable `a` (`a` est de type `str`).
L'instruction `a=int(input("texte"))` permet de saisir un entier au clavier et de l'affecter à la variable `a` (`a` est de type `int`).
L'instruction `a=float(input("texte"))` permet de saisir un nombre à virgule.

Instruction print

L'instruction `print(a)` affiche le contenu de la variable `a`.
L'instruction `print("texte")` affiche le *texte* écrit entre guillemets (ou apostrophes). L'instruction `print("texte",a)` affiche le *texte* suivi du contenu de la variable `a`.

Opérations sur les nombres

addition	soustraction	Multiplication	Division	Puissance
`a+b`	`a-b`	`a*b`	`a/b`	`a**b`

Opérateurs logiques

et	ou	non	$=$	$<$	$>$	$\leq$	$\geq$	$\neq$
`and`	`or`	`not`	`==`	`<`	`>`	`<=`	`>=`	`!=`

L'énumérateur range

`range(n)` énumère les entiers successifs de 0 à $n-1$
`range(n,m)` énumère les entiers successifs de n à $m-1$.
`range(n,m,r)` énumère les entiers $n, n+r, n+2r, \ldots$ jusqu'à la dernière valeur strictement inférieure à m (`r` s'appelle le *pas*).

Boucle « for »

```
for k in range(n) :
    |-instructions-
```

Répète n fois les instructions, une fois pour chaque valeur de k de $[\![0, n-1]\!]$.

L'énumérateur peut être `range(n,m)` ou `range(n,m,r)`.
Le bloc d'instructions doit être indenté (placé en retrait).

Boucle for sur un tableau (matrice ou vecteur)

Pour répéter l'instruction `instr` pour chaque valeur `k` d'un tableau `T`, on écrit :

```
for k in T :
    instr
```

Boucle « while »

`while -`*condition*`- :` |`-`*instructions*`-`	Répète les instructions indentées tant que le test défini par la *condition* est vrai.

Les instructions conditionnelles

`if -`*condition*`- :` |`-`*instruction*`-`	Exécute l'instruction si la condition est vraie (ne fait rien sinon).

`if -`*condition*`- :`
    |`-`*instruction 1*`-`
`else :`
    |`-`*instruction 2*`-`
	Exécute l'instruction 1 si la condition est vraie, et l'instruction 2 sinon.

`if -`*condition 1*`- :`
    |`-`*instruction 1*`-`
`elif -`*condition 2*`- :`
    |`-`*instruction 2*`-`
`else :`
    |`-`*instruction 3*`-`
	Exécute l'instruction 1 si la condition 1 est vraie.
	Sinon, et dans le cas où la condition 2 est vraie, exécute l'instruction 2.
	Sinon (c'est-à-dire si ni la condition 1, ni la condition 2 ne sont vraies), exécute l'instruction 3.
	On peut commander plusieurs blocs `elif`.

Fonctions

`def f(x) :` `return ...`	Crée la fonction f qui, à la variable x, associe l'expression $f(x)$ définie après `return`.

```
def f(x) :
    -instructions-
    return ...
```

Si la « fabrication » de $f(x)$ nécessite des instructions, elles doivent être indentées. L'expression qui définit $f(x)$ reste placée après `return`.

Par exemple, les instructions peuvent se présenter sous la forme `y=---`, et dans ce cas, on écrit ensuite `return y`.

&

Le principe de l'évolution est beaucoup plus rapide en informatique que chez le bipède.

Jean Dion

53. INFORMATIQUE : LIBRAIRIES

Importation de la librairie numpy

```
import numpy as np
```

Constantes

Deux constantes réelles : π , noté `np.pi` et e, noté `np.e`.

Fonctions prédéfinies de Python

$\ln x$	e^x	$\sqrt{x}$
`np.log(x)`	`np.exp(x)`	`np.sqrt(x)`

$\lvert x \rvert$	$\cos x$	$\sin x$
`np.abs(x)`	`np.cos(x)`	`np.sin(x)`

Partie entière

La partie entière du réel x se commande avec `np.floor(x)`.

Construction d'un vecteur

- `np.array([a,b,c])` est le vecteur de composantes a, b, c.

- `np.arange(a,b,r)` est le vecteur de composantes $a, a+r, a+2r, \ldots$ jusqu'à la dernière valeur strictement inférieure à b. Si le pas `r` n'est pas mentionné, il vaut 1 par défaut.

- `np.linspace(a,b,n)` est le vecteur à n composantes équiréparties, commençant par a et finissant par b.

Vecteurs prédéfinis

- `np.zeros(n)` est le vecteur à n composantes égales à 0.
- `np.ones(n)` est le vecteur à n composantes égales à 1.

Construction d'une matrice

- `np.array([[a,b,c],[d,e,f]])` : matrice $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$
- `np.array([[a,b,c]])` : matrice ligne $\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$
- `np.array([[a],[b]])` : matrice colonne $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Matrices prédéfinies

- `np.zeros((n,p))` : matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
- `np.ones((n,p))` : matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ composée de 1.
- `np.eye(n,p)` : matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont tous les éléments

sont nuls sauf les éléments dont le numéro de ligne est égal au numéro de colonne (ce sont les éléments diagonaux si $m = n$) qui eux valent 1.
`np.eye(p)` signifie `np.eye(p,p)`.

Opérations sur les matrices (élément à élément)

Syntaxe	`α*A`	`A+B`	`A-B`	`A*B`	`A/B`	`A**B`
Matrice renvoyée	αA	$A+B$	$A-B$	$(a_{i,j}b_{i,j})$	$(a_{i,j}/b_{i,j})$	$\left(a_{i,j}^{\,b_{i,j}}\right)$

Produit matriciel

L'instruction `np.dot(A,B)` renvoie le produit matriciel AB.

Transposition

L'instruction `np.transpose(A)` renvoie la transposée de la matrice A.

Fonctions de matrices

Si `A` est la matrice $(a_{i,j})$ et si f est une fonction prédéfinie de `Python`, alors `f(A)` est la matrice $(f(a_{i,j}))$.

Autres opérations sur un objet matriciel

La variable A contient une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et u un vecteur.

- a,b=np.shape(A) affecte à la variable a le nombre de lignes et à la variable b le nombre de colonnes de la matrice A.
- np.sum(u) renvoie la somme des éléments du vecteur u.
- np.cumsum(u) renvoie les sommes cumulées des éléments du vecteur u sous la forme d'un vecteur de même format que u.
- np.min(u) renvoie le plus petit élément de u.
- np.max(u) renvoie le plus grand élément de u.

Extraction des éléments d'un objet matriciel

u contient un vecteur u et la variable A une matrice A.

- u[k] renvoie la composante d'indice k de u.
- u[i1:i2] renvoie le vecteur $(u_{i_1},...,u_{i_2-1})$.
- A[i,j] renvoie le coefficient de la ligne d'indice i et de la colonne d'indice j de la matrice A.
- A[i,:] renvoie la ligne d'indice i sous forme d'un vecteur.
- A[:,j] renvoie la colonne d'indice j sous forme d'un vecteur.

Remarque. Les indices en Python commencent toujours à 0.

Modification des éléments d'un objet matriciel

Pour modifier un élément ou une partie d'un objet matriciel, il suffit de l'extraire et de lui affecter la nouvelle valeur.

Comparaison de deux matrices

Si A et B sont deux matrices de même format, l'instruction A==B renvoie une matrice de même format que A (ou B) dont les éléments sont True ou False selon que les coefficients correspondants de A et B à cette même place sont égaux ou non. Si tous les éléments de B sont égaux à un même réel x, on peut écrire simplement A==x.
On définit de même les matrices booléennes A>B, A>=B, A<B, A<=B et A!=B.

Importation de la librairie linalg

```
import numpy.linalg as al
```

Inverse d'une matrice

La commande `al.inv(A)` renvoie l'inverse de A (si A est inversible, bien sûr).

Rang d'une matrice

La commande `al.matrix_rank(A)` renvoie le rang de A.

Puissances d'une matrice carrée

Si la matrice A est une matrice carrée et n un entier relatif, la commande `al.matrix_power(A,n)` renvoie A^n (si $n < 0$, il faut bien sûr que A soit inversible).

Résolution d'un système linéaire

Si A est une matrice carrée **inversible** et si b est une matrice de même taille ou bien un vecteur colonne ayant le même nombre de lignes que A, la commande `al.solve(A,b)` renvoie la solution du système associé à l'équation $Ax = b$.

&

Cultivons avec ardeur les sciences mathématiques, sans vouloir les étendre au-delà de leur domaine

Augustin-Louis Cauchy

54. INFORMATIQUE : STATISTIQUES

Paramètres d'une série statistique

Le vecteur `x` définit la série statistique (x_i).

- `np.mean(x)` renvoie la moyenne des valeurs de `x`.
- `np.std(x)` renvoie l'écart type de `x`.
- `np.median(x)` renvoie la médiane de `x`.
- `np.var(x)` renvoie la variance de `x`.

Effectifs, effectifs cumulés

On considère la série statistique (x_i) ainsi que le vecteur `n` qui définit les effectifs n_i associés aux x_i.

- `np.sum(n)` renvoie l'effectif total de la série (x_i).
- `np.cumsum(n)` renvoie les effectifs cumulés de (x_i).

Fréquences, fréquences cumulées

On considère la série statistique (x_i) ainsi que le vecteur `n` qui définit les effectifs n_i associés aux x_i.

- `n/np.sum(n)` renvoie la liste des fréquences associées aux x_i.
- `np.cumsum(n)/np.sum(n)` renvoie la liste des fréquences cumulées associées aux x_i.

Coefficient de corrélation linéaire

On considère une série statistique double (x_i , y_i), les vecteurs `x` et `y` désignant respectivement les vecteurs (x_i) et (y_i).
`np.corrcoef(x,y)[0,1]` renvoie le coefficient de corrélation linéaire de la série (x_i , y_i).

Droite de régression linéaire

`a,b=np.polyfit(x,y,1)` affecte aux variables `a` et `b` les réels a et b tels que la droite d'équation $y = ax + b$ soit la droite de régression linéaire de y en x pour le nuage associé à (x_i , y_i).

Remarque. Ces deux dernières commandes ne sont pas exigibles.

55. INFORMATIQUE : GRAPHIQUES

Importation de la librairie matplotlib.pyplot

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

Commande plt.show()

Tout ensemble d'instructions de tracé doit se terminer par la commande `plt.show()` afin que le graphique puisse s'afficher.

Ligne brisée

La variable `x` contient le vecteur (x_i) et `y` contient le vecteur (y_i). La commande `plt.plot(x,y)` permet de tracer la ligne brisée reliant les points de coordonnées $(x_i\,,\,y_i)$.

Nuage de points

La variable `x` contient le vecteur (x_i) et `y` contient le vecteur (y_i). La commande `plt.plot(x,y,'+')` permet de tracer le nuage de points de coordonnées $(x_i\,,\,y_i)$, les points étant matérialisés par des « + ».

Représentation graphique d'une suite

Pour représenter les termes $u_0\,,\ldots,\,u_n$ de la suite u, on construit les vecteurs `x=np.arange(n+1)` et `u` de composantes $u_0,\ldots,\,u_n$, puis on commande `plt.plot(x,y,'+')`, les points étant matérialisés par des « + ».

Représentation graphique d'une fonction

Pour tracer la courbe de la fonction f sur l'intervalle $[a,\,b]$, on construit le vecteur `x` de première composante a, de dernière composante b, et de pas suffisamment petit pour que la ligne brisée donne l'illusion d'une courbe, on construit le vecteur `y` dont les composantes sont les $f(x_i)$, puis on écrit `plt.plot(x,y)`.

Histogramme

Le vecteur x contient la série statistique $x = (x_0,\ldots, x_p)$.

• L'instruction `plt.hist(x,n)` commande le tracé de l'histogramme associé à la série x en n classes découpées entre la plus petite valeur de x et la plus grande (par défaut, n vaut 10).

• Si `c` contient un vecteur $(c_0,\ldots, c_m)$, `plt.hist(x,c)` trace l'histogramme associé à la série x et dont les classes sont définies à l'aide de `c` : la i^{e} classe a pour extrémités c_{i-1} et c_i.

Diagramme en bâtons

Le vecteur x contient la série statistique $x = (x_0,\ldots, x_p)$. Le vecteur h contient le vecteur $h = (h_0,\ldots, h_p)$ qui définit les effectifs ou les fréquences associés. L'instruction `plt.bar(x,h)` commande le tracé du diagramme en bâtons associé à la série statistique, les h_i définissant les hauteurs des bâtons.

Boîte à moustaches

Le vecteur x contient la série statistique $x = (x_0,\ldots, x_p)$.
L'instruction `plt.boxplot(x)` commande le schéma de la boîte à moustaches associée à x.

Grille

On dessine la grille reliant les points (x_i, y_j) où x_i et y_j sont les composantes de x et de y, à l'aide de la commande :

```
X,Y=np.meshgrid(x,y).
```

Nappe 3D

Après importation de la librairie `Axes3D`, on obtient, sur la grille définie précédemment, la nappe représentant la fonction f à l'aide de la commande :

```
ax.plot_surface(X,Y,f(X,Y))
```

Lignes de niveau

Ayant obtenu la grille reliant les points (x_i, y_j) où x_i et y_j sont les composantes de `x` et de `y` avec `X,Y=np.meshgrid(x,y)`, la commande `plt.contour(X,Y,f(X,Y),n)` permet de tracer n lignes de niveau d'une fonction f, équiréparties entre la plus petite et la plus grande valeur de f.

Gradient

Ayant obtenu, grâce à `X,Y=np.meshgrid(x,y)` et `U,V=np.meshgrid(u,v)`, les grilles reliant les points (x_i, y_j) d'une part et les points (u_i, v_j) d'autre part, la commande `plt.quiver(X,Y,U,V)` permet de tracer n^2 flèches dont les origines sont les points de coordonnées (x_i, y_j), avec $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, et dont les directions respectives sont définies par les vecteurs de composantes (u_i, v_j), avec $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

&

Que nul n'entre ici s'il n'est géomètre.

Platon

56. INFORMATIQUE : SIMULATION

Importation de la librairie numpy.random

```
import numpy.random as rd
```

La fonction random

L'instruction `rd.random()` renvoie un nombre choisi au hasard dans l'intervalle $[0,1[$, c'est-à-dire que la fonction `rand` simule la valeur prise par une variable aléatoire X qui suit la loi uniforme sur $[0,1[$ (ou sur $[0,1]$, c'est la même chose).

Soit n et m deux entiers naturels non nuls :
`rd.random(n)` renvoie n simulations de X sous la forme d'un vecteur.
`rd.random([n,m])` renvoie nm simulations de X sous la forme d'une matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.

Simulation d'un événement de probabilité *p*

Si p est un réel de $[0,1]$, alors « `rd.random()<=p` » est un booléen qui prend la valeur `True` (ou la valeur 1) avec la probabilité p et la valeur `False` (ou la valeur 0) avec la probabilité $1-p$. Il simule donc un événement de probabilité p.

Simulation de variables aléatoires discrètes

Simuler une variable aléatoire discrète X, c'est écrire des commandes permettant de renvoyer une valeur de $X(\Omega)$, de telle sorte que, pour tout x_k de $X(\Omega)$, la valeur x_k soit renvoyée avec la probabilité $P(X=x_k)$.

Simulation de variables aléatoires à densité

Simuler une variable aléatoire à densité X, c'est écrire des commandes permettant de renvoyer une valeur de $X(\Omega)$, de telle sorte que, pour tout x de $X(\Omega)$ et pour tout couple (a,b) de réels tels que $a<b$, la probabilité que x soit dans l'intervalle $\left[a,b\right]$ est égale à $F_X\left(b\right)-F_X\left(a\right)$.

Simulation de variables suivant une loi usuelle

• Loi uniforme sur $[\![a,b-1]\!]$, avec a et b entiers tels que $a<b$:

`rd.randint(a,b)`

• Loi binomiale de paramètres n et p :

`rd.binomial(n,p)`

(une loi de Bernoulli est une loi binomiale avec $n = 1$)

• Loi géométrique de paramètre p :

`rd.geometric(p)`

• Loi de Poisson de paramètre λ :

`rd.poisson(lambda)`

• Loi uniforme sur l'intervalle $[a,b]$:

`(b-a)*rd.random()+a`

• Loi exponentielle de paramètre λ :

`rd.exponential(1/lambda)`

(on prendra garde au paramètre qui est l'inverse de celui du cours)

• Loi gamma de paramètre v :

`rd.gamma(v)`

• Loi normale de paramètre m et σ^2 :

`rd.normal(m,sigma)`

(on prendra garde au second paramètre qui est σ et non σ^2)

• Pour simuler r variables sous la forme d'un vecteur, on ajoute `r` après les paramètres et pour simuler rs variables sous la forme d'une matrice de $\mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{R})$, on ajoute `[r,s]` après les paramètres.

→ `rd.binomial(n,p,r)` simule r variables de loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ sous la forme d'un vecteur à r composantes.

→ `rd.normal(m,sigma,[r,s])` simule rs variables de loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ sous la forme d'une matrice de $\mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{R})$.

Librairie scipy.special

On importe la librairie `scipy.special` avec la commande :

```
import scipy.special as sp
```

Fonction Φ

Pour tout réel *x*, la commande `sp.ndtr(x)` renvoie la valeur de $\Phi(x)$.

Théorème limite central

Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes, de même loi et possédant une espérance μ et une variance $\sigma^2 > 0$.

On note $X = \dfrac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n}$ (moyenne empirique des *n* variables $Y_1,\dots,Y_n$). Plus l'entier *n* est grand, plus la loi de la variable *X* est proche de la loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$.

Application du théorème limite central

On reprend les notations du théorème limite central et on pose :

$$X^* = \sqrt{n}\,\frac{X-\mu}{\sigma} \quad \text{(variable aléatoire centrée réduite associée à } X\text{)}$$

Si la loi commune à toutes les variables Y_n est la loi uniforme sur [0,1], alors plus l'entier *n* est grand, plus la loi de la variable X^* est proche de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

Notion d'intervalle de confiance asymptotique

On considère un paramètre θ d'une loi de probabilité (par exemple le paramètre *p* d'une loi de Bernoulli) et *a* un réel de $]0,1[$. Un intervalle dont les extrémités sont des variables aléatoires qui ne dépendent pas de θ, et tel que la probabilité que θ se trouve dans cet intervalle soit au moins égale à $1-a$, s'appelle un intervalle de confiance de θ au niveau de confiance $1-a$. S'il est obtenu à l'aide du théorème limite central, il est dit asymptotique.

Index

A

B

C

D

E

F

G

H

I

K

L

M

N

O

P

Q

R

S

T

U

V

Si les gens ne croient pas que les mathématiques sont simples, c'est uniquement parce qu'ils ne réalisent pas à quel point la vie est compliquée.

John Von Neumann

Les 2 années
en 1 clin d'œil

PRÉPAS SCIENCES

Une **vision claire des savoirs**, une **mobilisation rapide des connaissances**, une **approche croisée des notions** à connaître sont les atouts indispensables à la réussite en prépas. Ce formulaire est la réponse à ces exigences. Il consiste en :

- un **résumé clair et concis** du cours : définitions, théorèmes, propriétés
- une **mise en valeur des formules** à connaître
- un **classement thématique** des notions indispensables
- un **index très précis** en fin d'ouvrage qui permet de retrouver au plus vite la notion cherchée.

Conçu pour appréhender le programme des deux années en un clin d'œil, ce formulaire est le **compagnon idéal** pour la préparation des colles, la résolution des exercices et des problèmes mais surtout pour accompagner les révisions avant les concours.
Il complète intelligemment les ouvrages ECG1 et ECG2 de la collection *Prépas sciences* qui permet une **acquisition solide des connaissances**.

www.editions-ellipses.fr
9 782340 066700